

Mechanika techniczna

Kierunek: Elektrotechnika

Katedra Mechaniki, Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej

Wektory. Pojęcia statyki. Aksjomaty statyki. Stopnie swobody. Podparcia bryły nieswobodnej. Siła i moment siły. Moment główny i wektor główny układu sił. Zmiana bieguna momentu. Redukcja dowolnego, przestrzennego układu sił. Skrętnik

Krzysztof Jamroziak

e-mail: krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl

Tel. 71 320 27 60

Konsultacje: wtorek: godz. 13.00-15.00

środa: godz. 13.00-15.00



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

Wymagania

	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Projekt	Seminarium
Liczba godzin zajęć zorganizowanych w Uczelni (ZZU):	20	10			
Liczba godzin zajęć całkowitego nakładu pracy studenta (CNPS):	54	27			
Forma zaliczenia:	zaliczenie na ocenę	zaliczenie na ocenę			
Dla grupy kursów zaznaczyć kurs końcowy (X):					
Liczba punktów ECTS:	2	1			
w tym liczba punktów odpowiadająca zajęciom o charakterze praktycznym (P):		1			
w tym liczba punktów ECTS odpowiadająca zajęciom wymagającym bezpośredniego kontaktu (BK):	1.40	0.70			

Wymagania

TREŚCI PROGRAMOWE

Forma zajęć - wykład

liczba godzin:

Wy1	Program. Wymagania. Wektory. Pojęcia statyki. Aksjomaty statyki. Stopnie swobody. Podparcia bryły nieswobodnej.	1
Wy2	Siła i moment siły. Moment główny i wektor główny układu sił. Zmiana bieguna momentu. Redukcja dowolnego, przestrzennego układu sił. Skrętnik.	1
Wy3	Redukcja płaskiego układu sił. Równania równowagi.	1
Wy4	Kratownice, reakcje, siły wewnętrzne.	1
Wy5	Belki, reakcje, siły wewnętrzne i ich wykresy.	2
Wy6	Momenty bezwładności, definicje, twierdzenie Steinera.	1
Wy7	Kinematyka punktu materialnego we współrzędnych ortogonalnych. Rozkład przyspieszenia w naturalnym układzie, klasyfikacja ruchów.	1
Wy8	Ruch względny punktu materialnego, ruch ogólny ciała sztywnego.	2
Wy9	Praca siły elementarnej, siły ciężkości, siły sprężystości, moc, energia, zasada zachowania energii.	1
Wy10	Podstawowe zadania dynamiki, równanie drgań o jednym stopniu swobody.	2
Wy11	Dynamika układu punktów materialnych, zasada ruchu środka masy, pęd i kręt układu punktów materialnych.	1
Wy12	Dynamika bryły sztywnej, pęd i kręt ciała sztywnego w ruchu ogólnym.	2
Wy13	Równania Eulera.	1
Wy14	Równania Lagrange'a II-go rodzaju.	1
Wy15	Sprawdzian.	2

suma godzin: **20**

Literatura

1. J. Misiak: Mechanika ogólna: Tom 1: Statyka i kinematyka, WNT, Warszawa 1998.
2. M. Klasztorny: Mechanika: Statyka, kinematyka, dynamika Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław 2000.
3. B. Gabryszewska, A. Pszonka: Mechanika, cz. I. Statyka, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995.
4. J. Misiak: Zadania z mechaniki ogólnej, cz. I, II, WNT, Warszawa 1999.
5. M. Klasztorny, T. Niezgoda: Mechanika ogólna. Podstawy teoretyczne, zadania z rozwiązaniami, WPW, Warszawa 2006.
6. Z. Jaśniewicz: Zbiór zadań ze statyki, Oficyna Wydawnicza Politechniki wrocławskiej, Wrocław 2004.

Literatura

UZUPEŁNIAJĄCA

1. W. Derski: Mechanika techniczna, PWN, Warszawa 1982.
2. Z. Engel, J. Gergiel: Mechanika ogólna, tom I. Statyka i kinematyka, PWN, Warszawa 1990.
3. J. Leyko: Mechanika ogólna, tom I. Statyka i kinematyka, PWN, Warszawa 2016.
4. Z. Osiński: Mechanika ogólna, cz. 1. PWN, Warszawa 1987.
5. K. Zarankiewicz: Mechanika teoretyczna, tom I. Statyka, PWN, Warszawa 1966.
6. J. Zawadzki, W. Siuta: Mechanika ogólna, PWN, Warszawa 1970.

Wektory

Wielkości występujące w mechanice można podzielić na:

- skalary,
- wektory.

Skalar to wielkość, którą można określić za pomocą jednej liczby rzeczywistej.

Przykłady to:

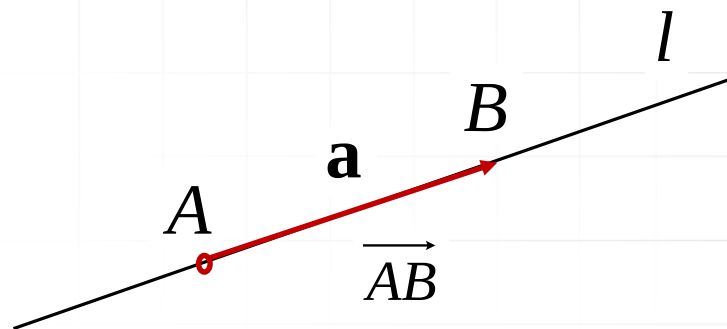
- masa,
- temperatura,
- czas,
- praca,
- energia kinetyczna,
- itp.

Wektory

Wektor jest wielkością określoną liczbą oraz mający kierunek i zwrot w przestrzeni.

Przykłady to:

- siła,
- prędkość,
- przyspieszenie,
- Pęd,
- itp.



Rys. 1. Oznaczenie wektora $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$

Wektor oznaczamy przez symbol w postaci:

$\mathbf{a}$ $\overline{a}$ $\vec{a}$ $\overrightarrow{AB}$

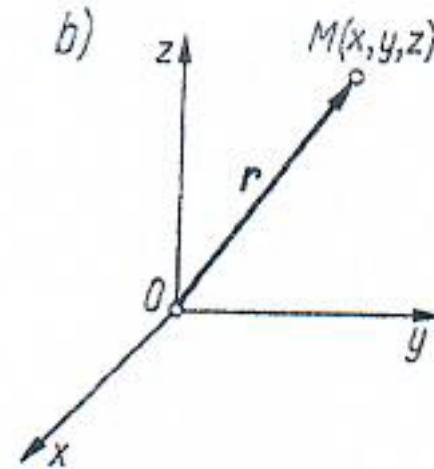
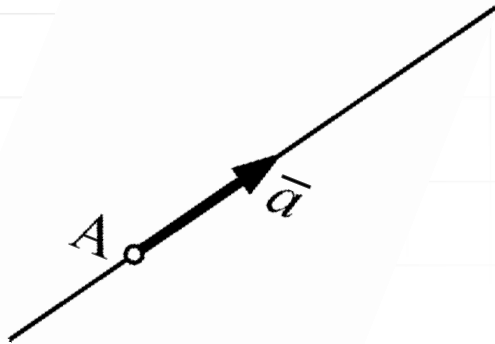
Wartość bezwzględna wektora nazywa się modułem, który odpowiada długości odcinka i oznaczamy:

$|\overline{a}|$ $|\mathbf{a}|$ $|\overrightarrow{AB}|$ a

Wektory

Wektory uczone

Wektor zaczepiony jest określony przez wartość, zwrot, prostą działania i punkt zaczepienia (rys. 2).



Rys. 2. Wektory związane z punktem

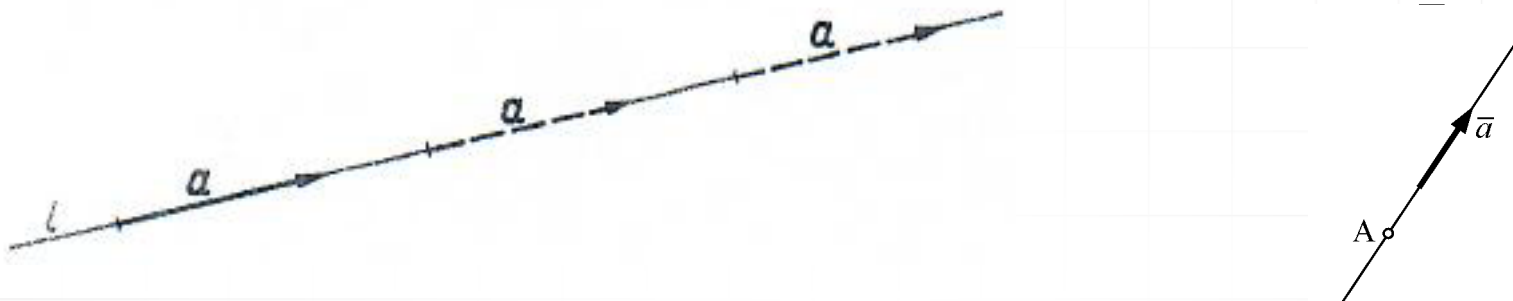
Wektorów takich nie można przenosić, ani przesuwać wzdłuż prostej.

Wektorem takim jest np. promień wektor $\mathbf{r}$ czy wektor siły ciężkości $\mathbf{G}$.

Wektory

Wektory związane z prostą

Wektor liniowy jest określony przez wartość, zwrot i prostą działania (rys. 3).



Rys. 3. Wektory związane z prostą

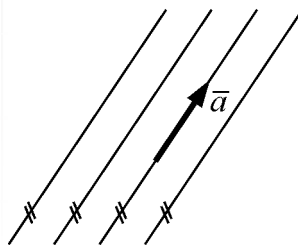
Wektora takiego nie można przenosić w dowolne miejsce przestrzeni, lecz można jedynie przesuwąć wzdłuż linii określającej jego położenie.

Takie wektory nazywamy **wektorami ślizgającymi się** lub **posuwnymi**.

Wektory

Wektory swobodne

Wektor swobodny jest określony przez wartość, zwrot i kierunek oraz może być przesuwany równolegle (rys. 4).



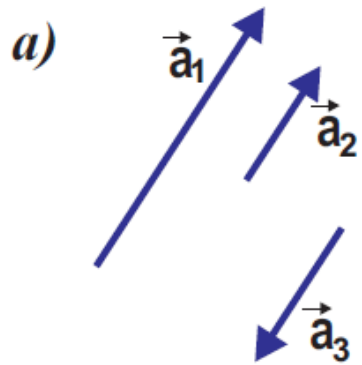
Rys. 4. Wektor swobodny

Rodzaje wektorów swobodnych:

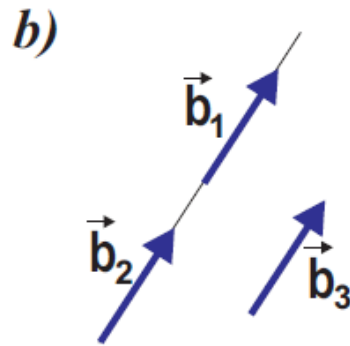
- równoległe,
- równe,
- przeciwne,
- równoważne,
- zerowe,
- jednostkowe (wersory).

Wektory

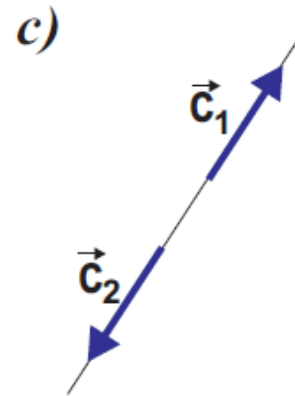
Podział wektorów swobodnych



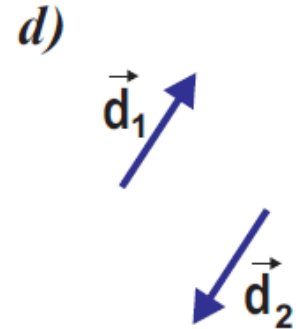
$$\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \vec{a}_3$$



$$\vec{b}_1 = \vec{b}_2 = \vec{b}_3$$



$$\vec{c}_1 = -\vec{c}_2$$



$$\vec{d}_1 = -\vec{d}_2$$

Rys. 5. Rodzaje wektorów: a) równoległe, b) równe, c) i d) przeciwne

Wektory

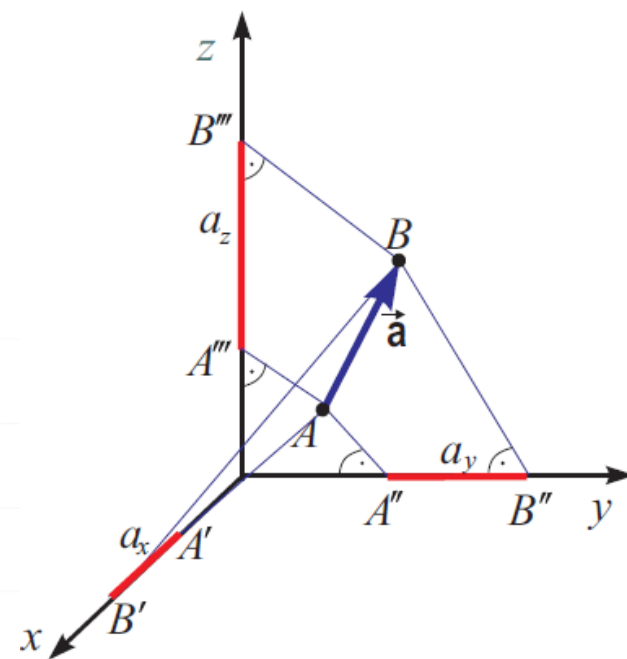
Współrzędne wektora

Współzrędnymi wektora $\vec{a}$ w kartezjańskim układzie współrzędnych xyz nazywa się wielkości a_x , a_y , a_z określone jako różnice odpowiednich współrzędnych końca i początku wektora (rys. 6)

$$a_x = x_{B'} - x_{A'}$$

$$a_y = y_{B''} - y_{A''}$$

$$a_z = z_{B'''} - z_{A'''}$$



Rys. 6. Współrzędne wektora

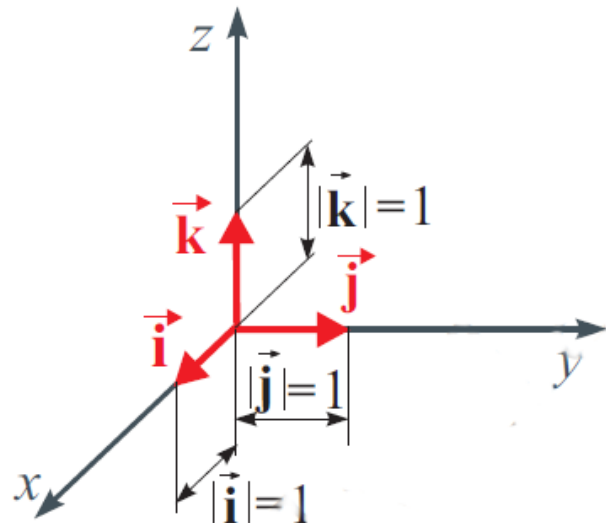
Współrzędne mają wartość dodatnią (znak "+"), jeśli $x_{B'} > x_{A'}$ ($x_{B''} > x_{A''}$, $x_{B'''} > x_{A'''});$ w przeciwnym przypadku mają wartość ujemną (znak "-").

Wektory

Wektor zerowy i jednostkowy

Wektorem zerowym nazywamy wektor, którego moduł jest równy zero.

Wektorem jednostkowym osi (wersorem osi) jest nazywany wektor, którego moduł jest równy jeden, a kierunek i zwrot pokrywają się z kierunkiem i zwrotem osi. Wersor osi x jest oznaczany symbolem $\vec{i}$, osi y symbolem $\vec{j}$, a osi z symbolem $\vec{k}$ (rys. 2.6).



Rys. 7. Wektory jednostkowe osi x , y , z

Wektory

Analityczne przedstawienie wektora

W kartezjańskim układzie wektor jest określony równaniem:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

Gdzie: a_x , a_y , a_z są składowymi wektora. Składowe wektora są liczbami, które mogą być dodatnie, ujemne lub równe zero.

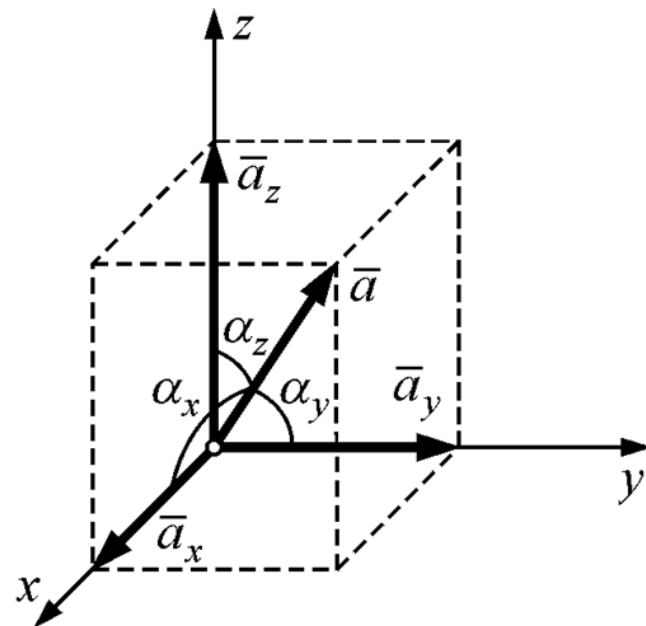
Wersory są wektorami jednostkowymi, określającymi kierunek i uprzywilejowany zwrot rzutów wektora na osie.

Wektory

Analityczne przedstawienie wektora

Moduł (wartość) wektora $\vec{a}$ wynosi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Rys. 8. Suma trzech rzutów dowolnego wektora

ponieważ wektor $\vec{a}$ jest przekątną prostopadłościanu rozpiętego na rzutach

Wektory

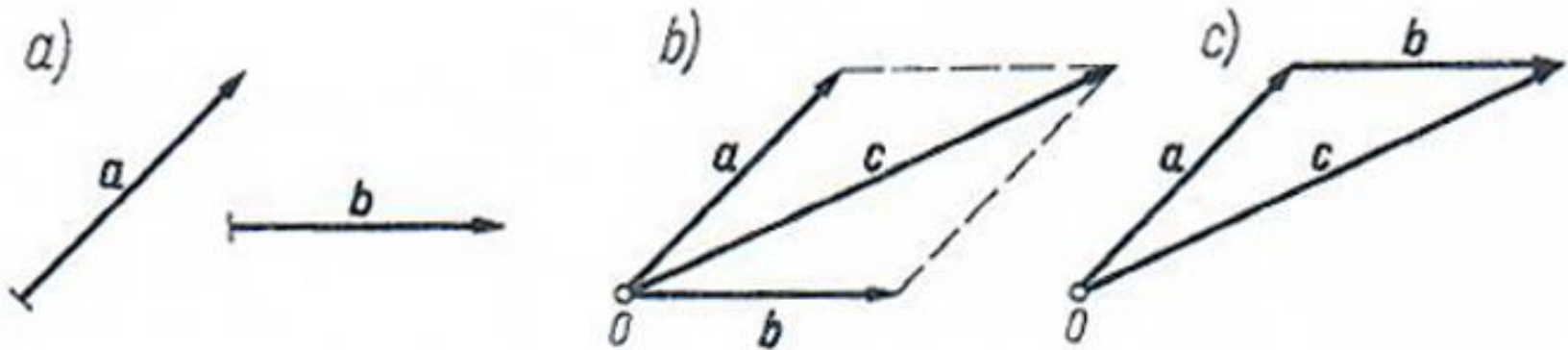
Analityczne przedstawienie wektora

Kosinusy kierunkowe wektora $\bar{a}$ wynoszą:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_x &= \frac{a_x}{a} \\ \cos \alpha_y &= \frac{a_y}{a} \\ \cos \alpha_z &= \frac{a_z}{a} \end{aligned} \right\} \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$$

Wektory

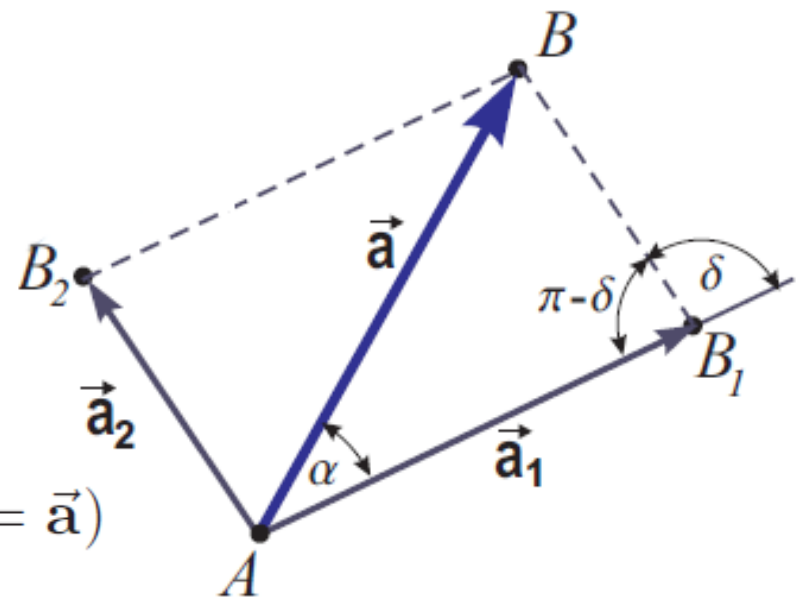
Dodawanie wektorów



Rys. 9. Dodawanie dwóch wektorów

Wektory

Dodawanie wektorów



Dodawanie dwóch wektorów ($\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}$)

Długość wektora $\vec{a}$ ($\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$) można wyznaczyć na podstawie wzoru cosinusów jako

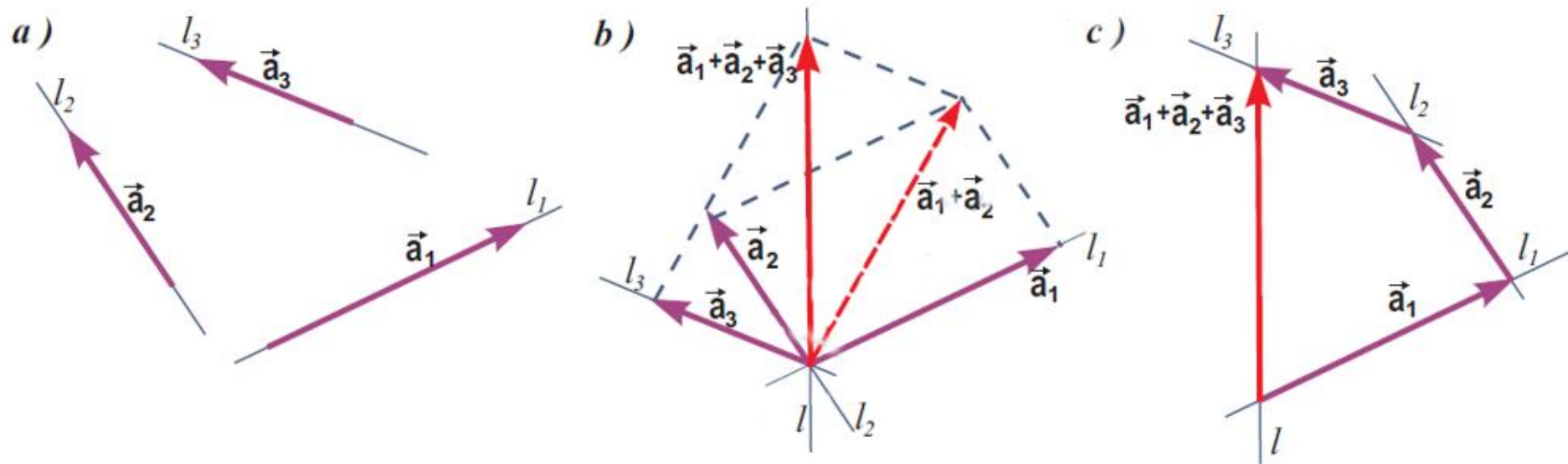
$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \delta)}$$

lub

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta}$$

Wektory

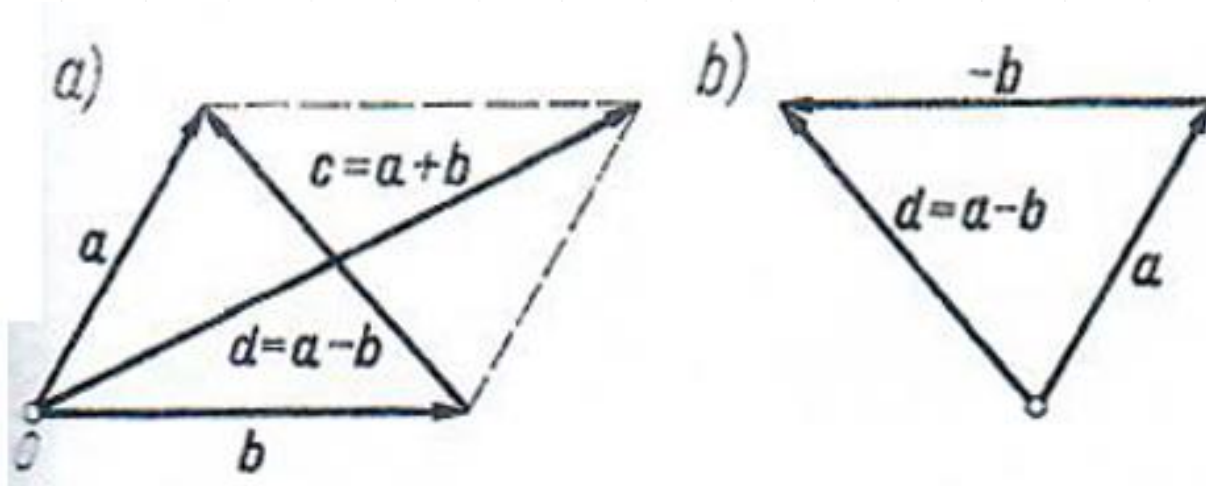
Dodawanie wektorów



Rys. 10. Dodawanie wektorów swobodnych: a) dodawane wektory, b) metoda równoległoboku, b) metoda wieloboku

Wektory

Odejmowanie wektorów



Rys. 11. Odejmowanie dwóch wektorów

Wektory

Dodawanie wektorów

Dodawanie podlega prawom:

- przemienności;
- łączności.

Mnożenie wektora przez skalar

$$c \vec{a} = \vec{b}, \quad b = ca$$

gdzie a , b są długościami wektorów $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Wektory

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

Iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wielkością skalarną, określoną zależnością:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c = ab \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = ab \cos \alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów w mechanice wykorzystywany jest do wyznaczania rzutu wektora na oś, pracy siły, a także przy definiowaniu energii kinetycznej.

Wektory

Iloczyn skalarny dwóch wektorów

$$a \Downarrow \Downarrow b, \quad \cos(a, b) = 1, \quad a \cdot b = ab$$

$$a \Downarrow \Uparrow b, \quad \cos(a, b) = -1, \quad a \cdot b = -ab$$

$$a \perp b, \quad \cos(a, b) = 0, \quad a \cdot b = 0$$

$$a = b, \quad \cos(a, b) = 1, \quad a \cdot b = a^2$$

Z własności iloczynu skalarnego wynikają następujące związki między wektorami jednostkowymi (wersorami)

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

Analityczne wyrażenie iloczynu skalarnego dwóch wektorów a i b ma postać

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) = \\ &= a_x b_x i \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + a_y b_x j \cdot i + a_y b_y j \cdot j + a_y b_z j \cdot k + \\ &\quad + a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + a_z b_z k \cdot k = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned}$$

możemy znaleźć kąt między danymi wektorami a i b

$$\cos(a, b) = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

Wektory

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Iloczyn wektorowy wektorów $a \times b$ jest to wektor, którego moduł równa się iloczynowi modułów wektorów składowych przez sinus kąta zawartego między nimi:

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$$

$$c = ab \sin(\bar{a}, \bar{b})$$

Iloczyn wektorowy spełnia następujące prawa:

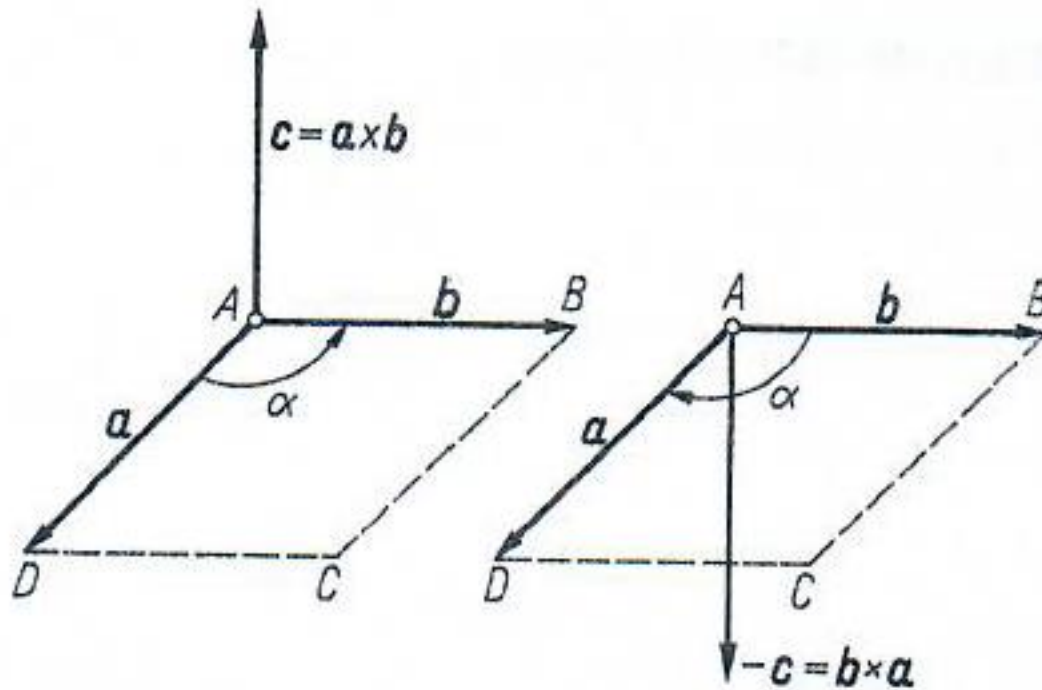
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

$$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$$

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Wektory

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów



Rys. 13. Reguła iloczynu wektorowego

Wektory

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

$$a \parallel b, \quad \sin(a, b) = 0, \quad a \times b = 0$$

$$a = b, \quad \sin(a, b) = 0, \quad a \times b = 0$$

$$a \perp b, \quad \sin(a, b) = 1, \quad a \times b = ab(a^0 \times b^0), \quad |a \times b| = ab$$

Z własności iloczynu wektorowego wynikają związki między wektorami jednostkowymi (wersorami):

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

$$i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

Wektory

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

Iloczyn wektorowy wektorów **a** i **b** można przedstawić analitycznie:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + \\ &+ a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \\ &+ a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

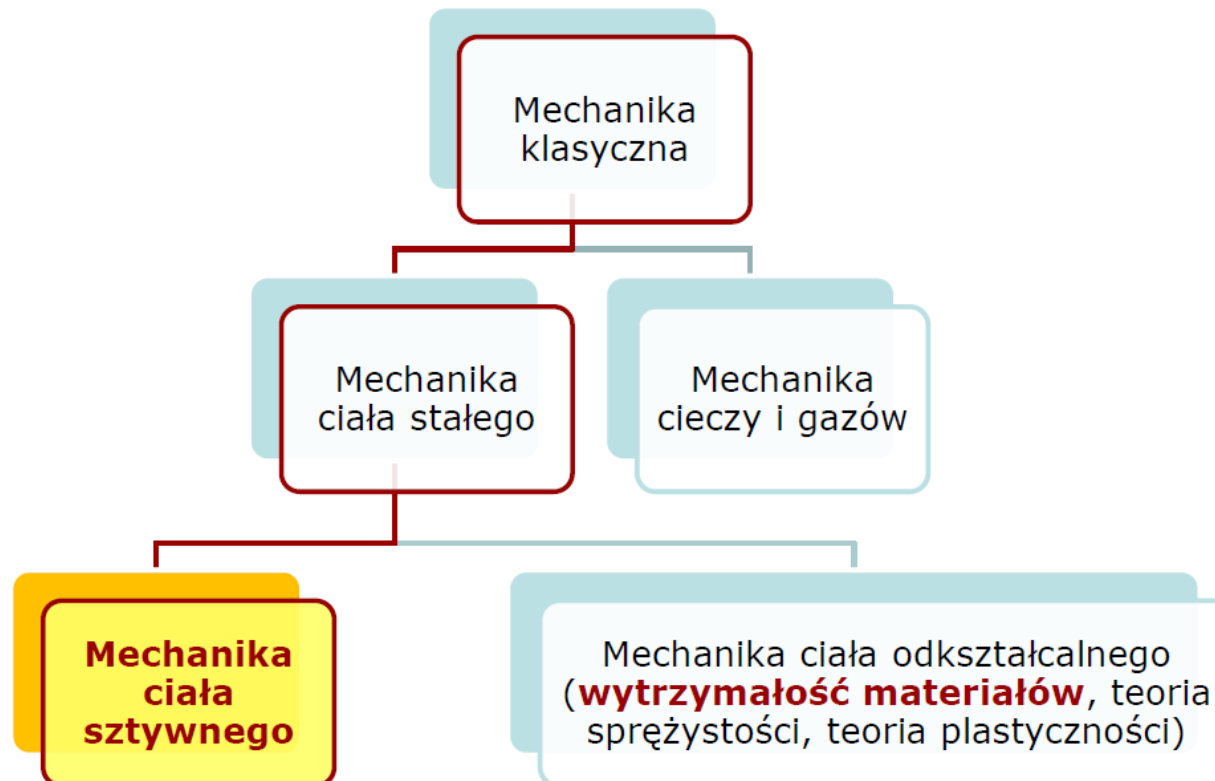
Wyrażenie jest rozwinięciem wyznacznika:

$$\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Pojęcia statyki. Aksjomaty statyki. Stopnie swobody.

Podparcia bryły nieswobodnej

Mechanika: nauka (dział fizyki) zajmująca się badaniem ruchu mechanicznego ciał, tj. przemieszczeniami jednych ciał względem drugich oraz wzajemnymi przemieszczeniami pewnych cząstek danego ciała, w zakresie przyczyn ich powstania oraz zjawisk im towarzyszących.



Działy mechaniki

Statyka

dział mechaniki zajmujący się badaniem równowagi ciał materialnych.

Kinematyka

dział mechaniki zajmujący się badaniem ruchu mechanicznego ciał bez uwzględnienia ich cech fizycznych i działających na nie sił..

Dynamika

dział mechaniki zajmujący się ruchem ciał materialnych pod działaniem sił (określa związki między siłami a ruchem jako ich skutkiem).

Pojęcia statyki

Pojęcia podstawowe w mechanice punktów materialnych i ciał sztywnych

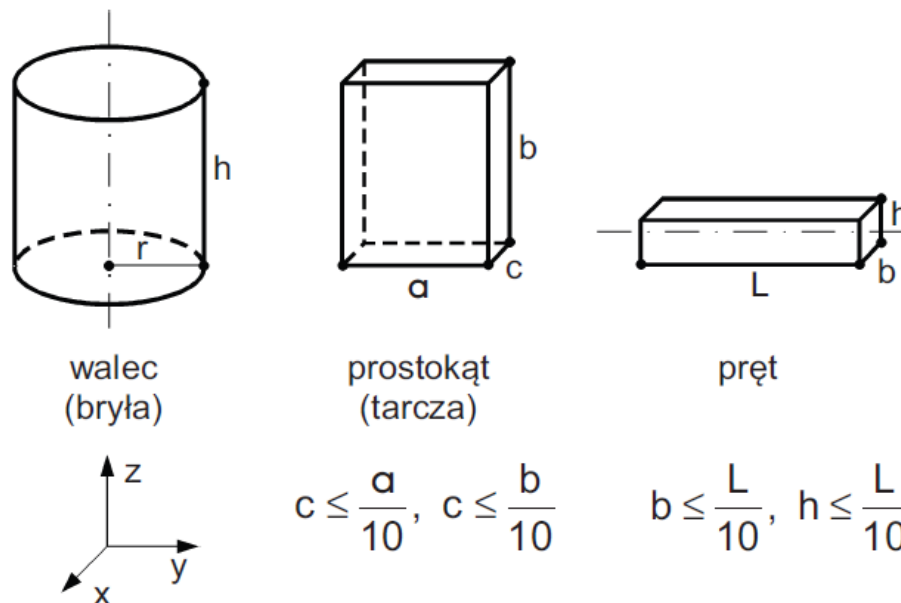
W mechanice punktów materialnych i ciał sztywnych występuje szereg pojęć o charakterze pierwotnym, z których najważniejsze to: *punkt materialny*, *ciało sztywne*, *siła*, *para sił*, *równowaga statyczna*.

Punkt materialny jest pojęciem abstrakcyjnym. *Ciało sztywne* jest nieodkształcalnym ciałem stałym. Przyjmuje się, że punkty materialne tworzące ciało sztywne są rozłożone w sposób ciągły. Rozkład ten jest określony przez gęstość masy [kg/m^3]. Modelem ciała sztywnego może być zbiór punktów materialnych o stałych odległościach wzajemnych.

W praktyce występują bryły o różnych kształtach, m.in. walec, kula, stożek, półkula. Również tarcze mogą przyjmować kształt dowolnych płaskich figur geometrycznych (prostokąt, trójkąt, koło, pierścień i in.).

Pręt pokazany na rys.1. nazywamy *prętem pryzmatycznym*, o prostokątnym przekroju poprzecznym. Taki pręt ma kształt wydłużonego prostopadłościanu.

- *Punktem materialnym* nazywamy obiekt o zerowych wymiarach i skończonej masie.
 - *Ciałem sztywnym* nazywamy zbiór punktów materialnych o stałych odległościach między nimi.
 - Typy ciał sztywnych: bryła, tarcza, pręt
- Przykłady:



Rys. 1.

Pojęcia statyki

Wyidealizowane modele ciał rzeczywistych

punkt materialny	punkt geometryczny któremu przepisano pewną masę.
układ punktów materialnych	(ciało sztywne, bryła) – zbiór punktów materialnych o niezmiennych wzajemnych odległościach
ciało swobodne	ciało mogące dowolnie przemieszczać się w przestrzeni.
ciało nieswobodne	ciało którego ruch w przestrzeni ograniczony jest określonymi więzami.

Prawa Newtona

I prawo

Każde ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, dopóki działanie innych ciał nie zmusi go do zmiany tego stanu.

Ciało pozostaje w stanie spoczynku lub stałej prędkości, gdy jest pozostawione samo sobie (działająca na nie siła wypadkowa jest równa zero)

$$(\overline{F}_{\text{wyp}} = 0) \Rightarrow (\overline{a} = 0)$$

$$\overline{F} = \sum_{i=1}^n \overline{F}_i = 0$$

Inaczej nazywana **zasadą bezwładności**.

Prawa Newtona

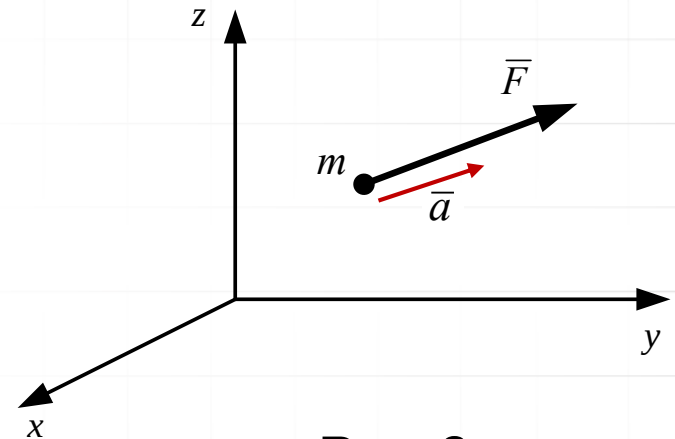
II prawo

Przyspieszenie punktu materialnego jest wprost proporcjonalne do siły działania na ten punkt, a odwrotnie proporcjonalne do masy punktu materialnego. Jego zwrot i kierunek zgodny jest ze zwrotem i kierunkiem wektora siły.

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}_{\text{wyp}}}{m}$$



$$m\bar{a} = \bar{F}$$



Rys. 2.

Widzimy, że zagadnienie to jest odwróceniem pierwszego zagadnienia dynamiki i stąd jest ono również znane pod nazwą – **zagadnienie odwrotne dynamiki**.

Prawa Newtona

III prawo

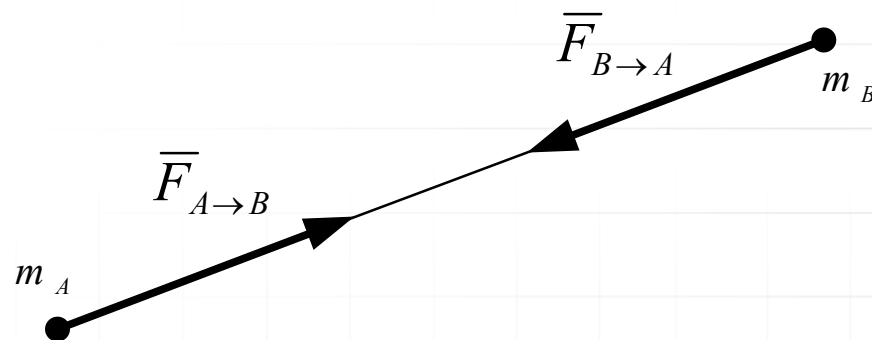
Działania na siebie dwóch ciał są zawsze równe, lecz przeciwnie skierowane.

Gdy dwa ciała oddziałują wzajemnie, to siła wywierana przez ciało drugie na pierwsze jest równa i przeciwnie skierowana do siły, jaką ciało pierwsze działa na drugie ciało.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$



$$F_{A \rightarrow B} = F_{B \rightarrow A}$$



Rys. 3.

Te siły oddziaływania między ciałami nazywane są **siłami reakcji** (albo: **siłami oddziaływania**).

Prawa Newtona

IV prawo

Jeżeli na punkt materialny o masie m działa jednocześnie kilka sił, to każda z nich działa niezależnie od pozostałych, a wszystkie razem działają tak, jak jedna tylko siła równa wektorowej sumie wektorów danych sił.

$$\frac{d}{dt} (m\bar{v}_1 + m\bar{v}_2 + \dots + m\bar{v}_n) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$$

$$\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i$$

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$

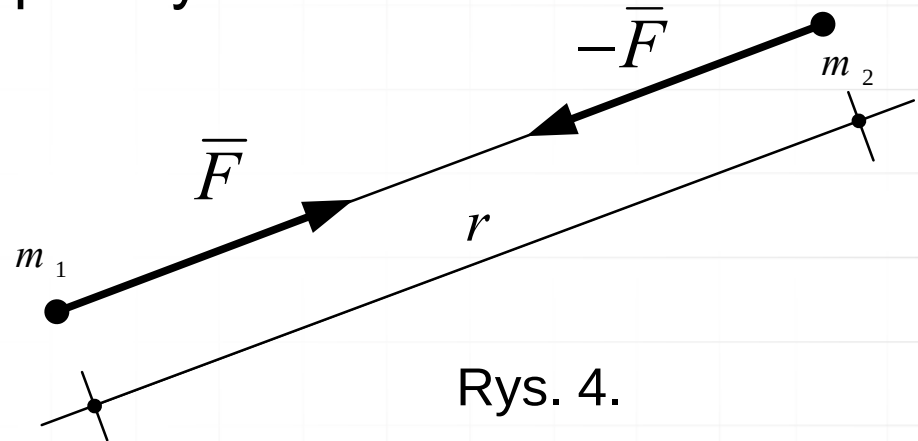
Zasada ta określana jest jako **zasada niezależności działania sił**.

Prawa Newtona

V prawo

Każde dwa punkty materialne przyciągają się wzajemnie z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas (m_1, m_2) i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości r między nimi. Kierunek siły leży na prostej łączącej te punkty.

$$\vec{F} = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{i}$$



Zasada ta określana mianem **powszechnego ciążenia**.

k - stała grawitacji.

$$k = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Prawo powszechnego ciążenia (siła grawitacyjna)

Siłę grawitacyjną nazywamy inaczej **ciężarem** tego ciała. Równa jest ona iloczynowi masy tego ciała i przyspieszenia grawitacyjnego.

Zgodnie z II zasadą siła ciężkości ziemi jest więc równa:

$$G = mg$$

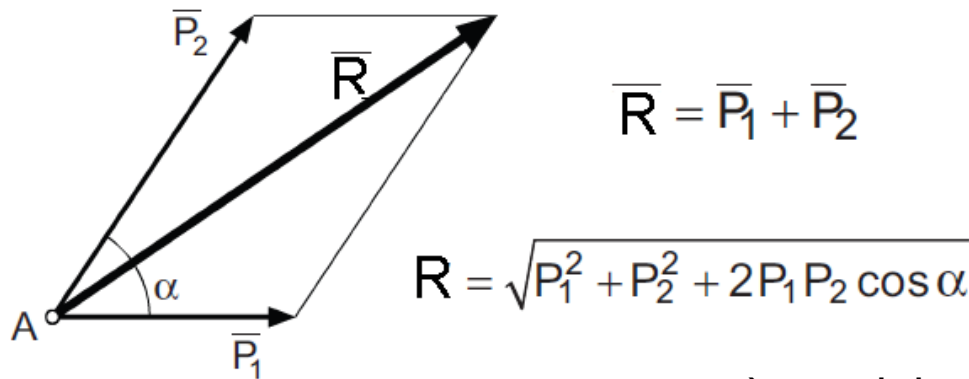
$$a = g = 9,81\text{m/s}^2$$

Aksjomaty statyki

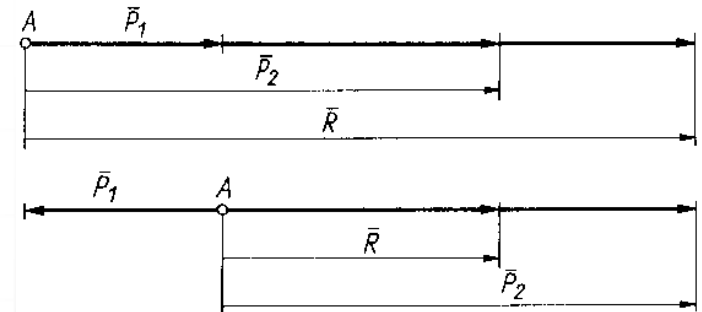
Aksjomaty to postulaty, których się nie dowodzi, przyjmuje jako pewnik.

I Zasada równoległoboku

Dwie siły $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ działające na punkt A można zastąpić siłą wypadkową $\vec{R}$ będącą przekątną równoległoboku rozpiętego na tych siłach.



Przypadki szczególne



1) Zgodnie skierowane

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

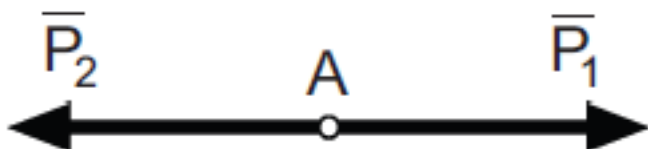
2) Przeciwnie skierowane $P_2 > P_1$

$$\vec{R} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

Aksjomaty statyki

II Zasada

Dwie siły równoważą się wzajemnie jeśli mają jednakowe wartości (moduły), działają wzdłuż jednego kierunku i mają przeciwne zwroty.



$$\bar{P}_2 = -\bar{P}_1$$

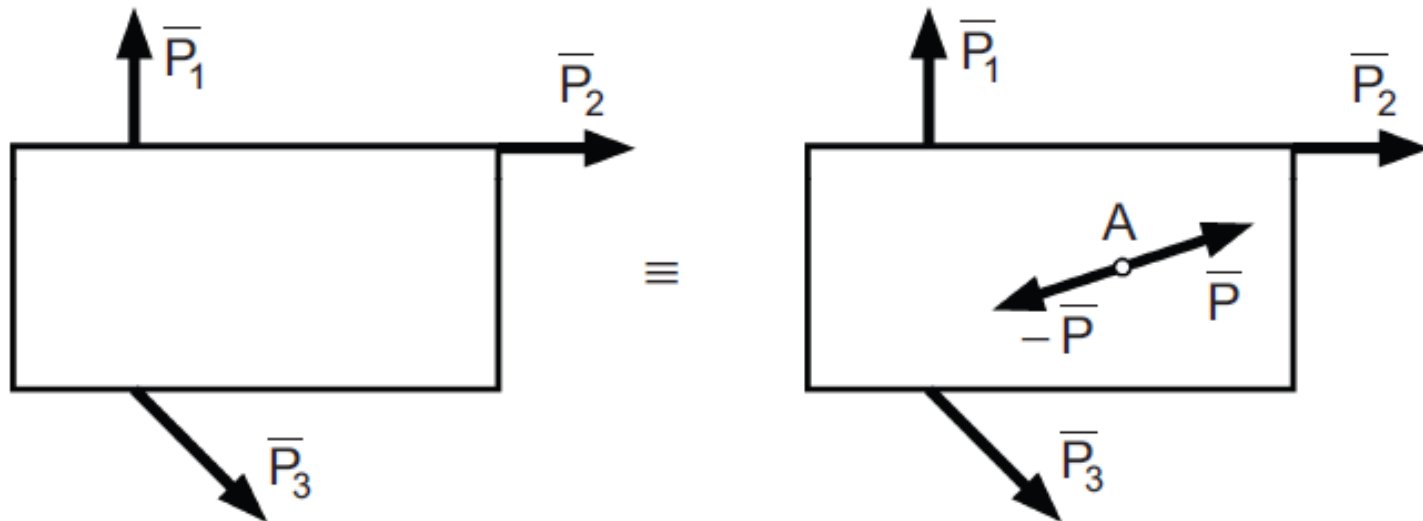
$$P_1 = P_2$$

$$W = 0$$

Układ takich sił nazywamy **układem zerowym**.

III Zasada

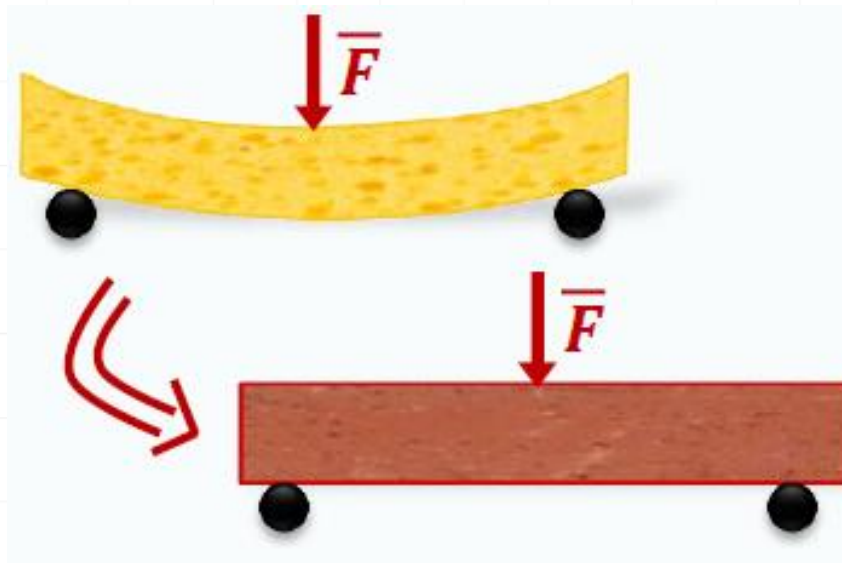
Działanie układu sił działających na ciało nie ulegnie zmianie, jeżeli dodamy do niego lub odejmiemy od niego układ sił równoważny zeru.



Rys. 5.

IV Zasada

Równowaga ciała odkształcalnego nie zostanie naruszana jeżeli ciało to stanie się ciałem sztywnym.



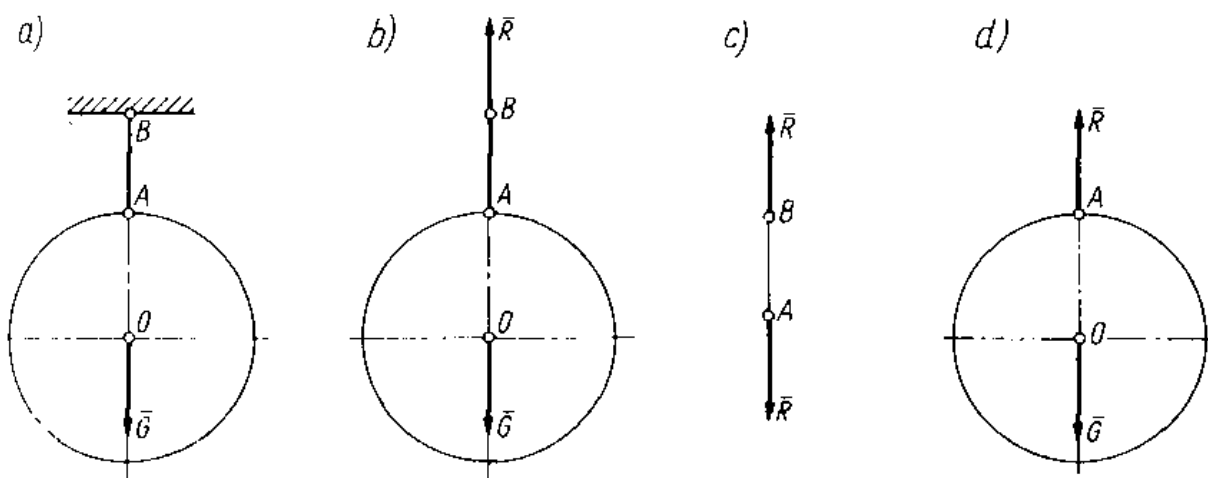
Rys. 6.

Wynika, że warunek konieczny i wystarczający dla równowagi ciała sztywnego jest tylko warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym dla równowagi ciała odkształcalnego.

Aksjomaty statyki

V Zasada

Wszelkiemu działaniu siły odpowiada równe i przeciwne skierowane przeciwdziałanie.

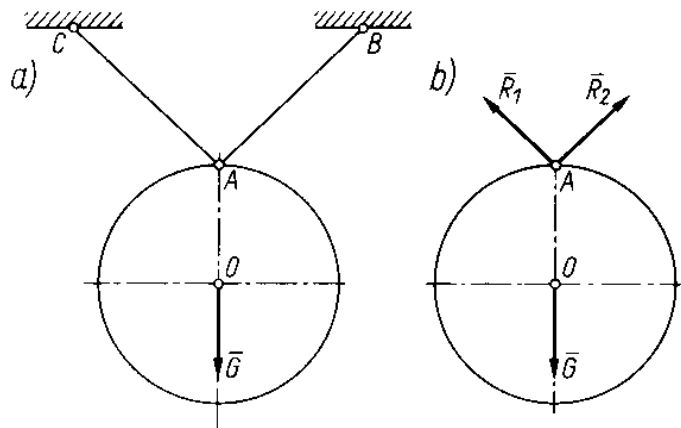


Rys. 7.

Jako przykład zaprezentowano na kuli o ciężarze $\vec{G}$ zawieszonym na linie w punkcie A (7a). Na kulę oprócz siły ciężkości $\vec{G}$ działa również reakcja w punkcie zawieszenia siła reakcji $\vec{R}$ (7b). Zgodnie z zasadą równowagi siła $\vec{R} = -\vec{G}$. Wartości są równe.

VI Zasada

Ciało nieswobodne możemy traktować jak ciało swobodne jeżeli myślowo uwolnili się je od więzów, zastępując ich działanie odpowiednimi reakcjami.



Rys. 8.

Jako przykład zaprezentowano jednorodną kulę o ciężarze $\bar{G}$ (siła czynna), zawieszoną na dwóch linach 8a. Układ równoważny przedstawiono na rysunku 8b, zastępując działanie obu lin reakcjami $\bar{R}_1$ i $\bar{R}_2$ (siłami biernymi).

Siła

Siła – wzajemne oddziaływanie ciał, które przejawia się w wyprowadzeniu ciała ze stanu spoczynku, bądź przez zmianę ruchu już poruszającego się ciała. Aby scharakteryzować siłę należy podać wektor opisujący tą siłę oraz punkt przyłożenia siły.

Siła, moment siły – wynik wzajemnego oddziaływania ciał na siebie.

Rodzaje sił – ze względu na pochodzenie

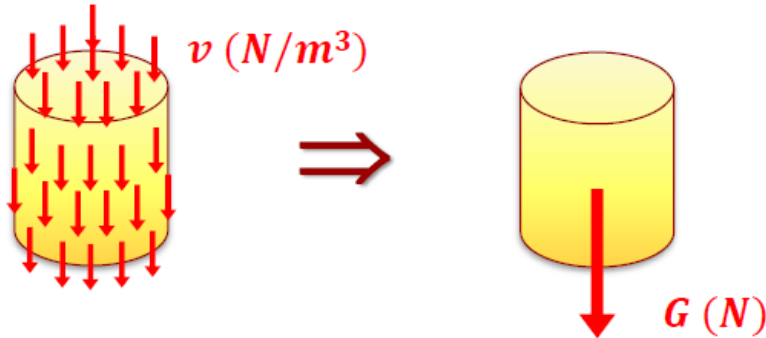
a) siły zewnętrzne – przyłożone do danego ciała, wywierane przez inne ciało,

- **czynne** – mogące wywołać ruch, niezależne od warunków w jakich znajduje się dane ciało,
- **bierne** – stanowią wynik oddziaływania więzów (siły reakcji),

b) siły wewnętrzne – siły wzajemnego oddziaływania pomiędzy punktami materialnymi rozpatrywanego układu,

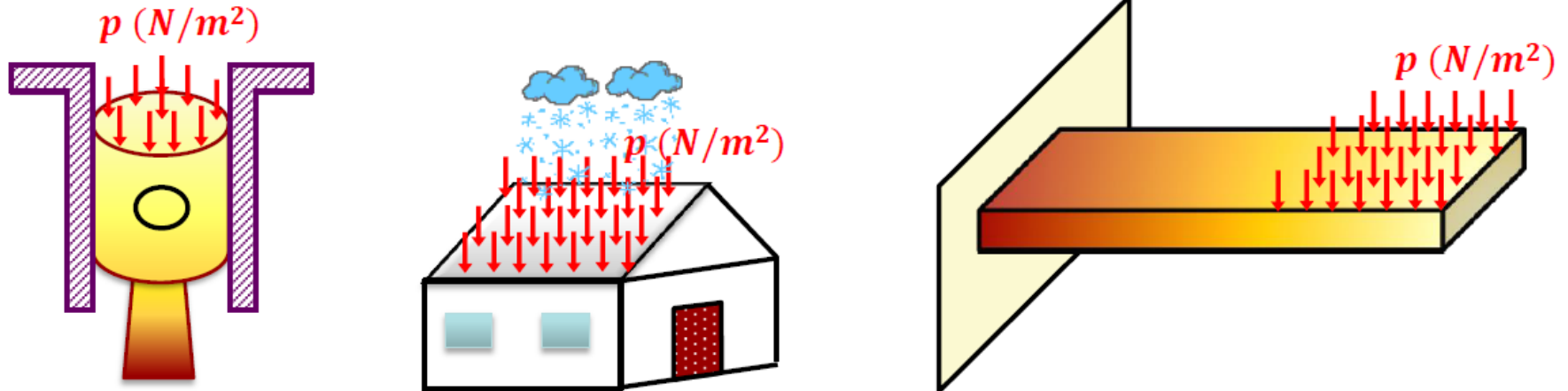
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

a) objętościowe (masowe) – działające na każdą cząstkę ciała (np. siły ciężkości),



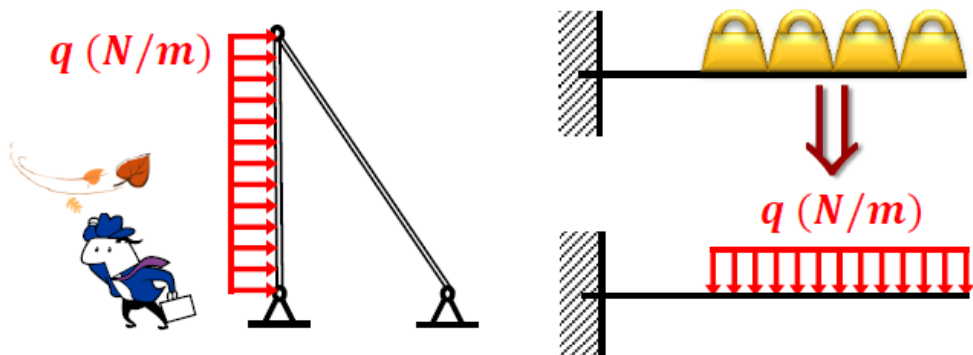
siły masowe zwykle zastępowane są działaniem siły skupionej przyłożonej w środku ciężkości bryły

b) powierzchniowe – działające na powierzchnię ciała,



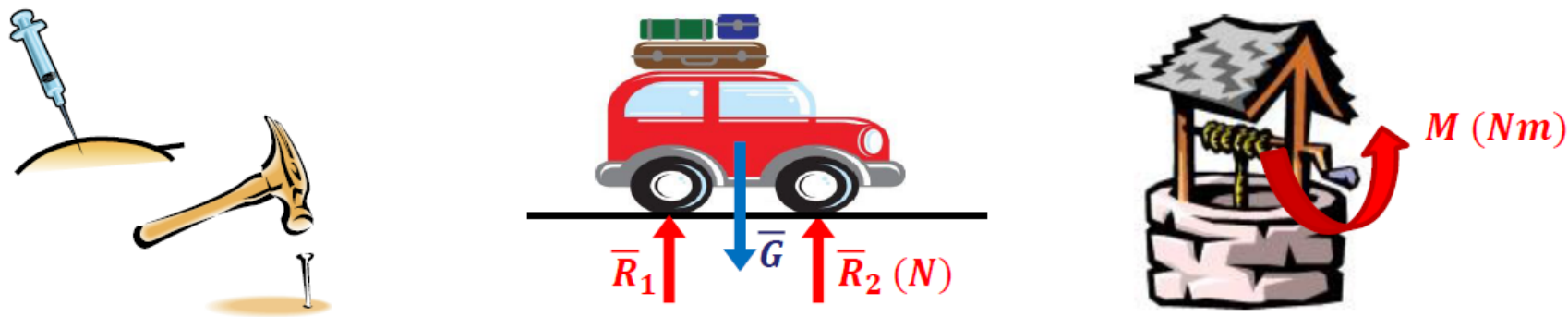
Rodzaje obciążeń – ze względu na sposób przyłożenia:

c) obciążenia liniowe – przyłożone w sposób ciągły na pewnej długości,



Zazwyczaj za pomocą obciążenia liniowego odwzorowuje się działanie obciążenia powierzchniowego w przypadku modeli płaskich

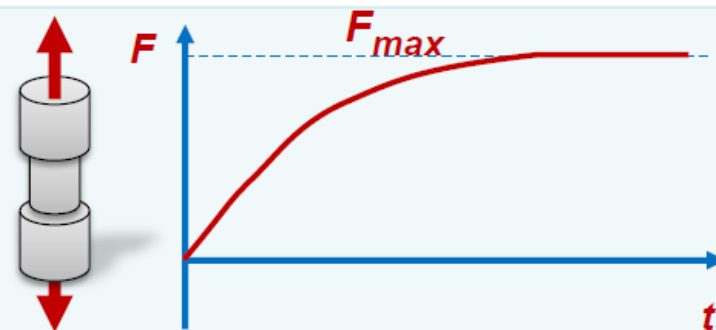
d) obciążenie skupione – siła lub moment siły przyłożone w punkcie,



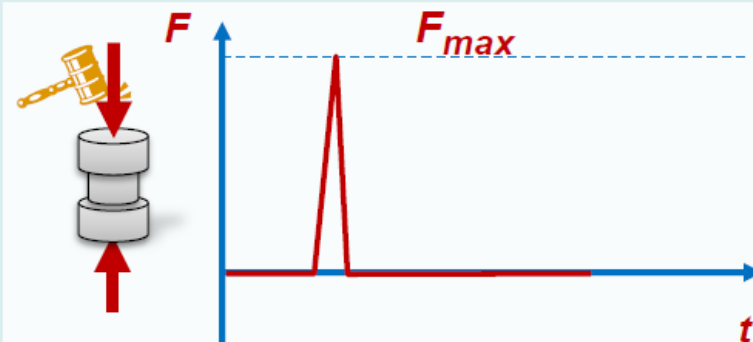
Dane obciążenie uznać można za skupione, jeżeli powierzchnia jego oddziaływania jest znacznie mniejsza od wymiarów elementu.

Rodzaje obciążeń – ze względu na zmiany w czasie:

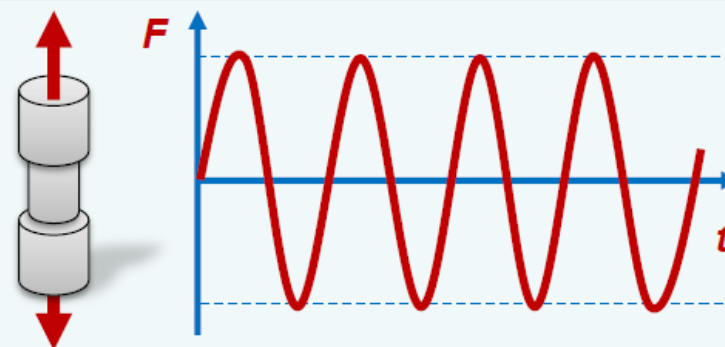
a) **statyczne** – narastające w sposób powolny od zera do pewnej wartości



b) **dynamiczne** – przyłożone w sposób nagły, działające impulsowo



c) **okresowo-zmienne** – zmieniające wielokrotnie wartość w czasie



Podstawowe jednostki

- **Masa:** g (gram); kg = 1000 g (kilogram)
- **Długość:** mm = 0,001 m (milimetr);
m (metr); km = 1000 m (kilometr)
- **Czas:** s (sekunda); min = 60 s (minuta);
h = 60 min = 3600 s (godzina)
- **Siła:** N = kg*m/s² (niuton); kN = 1000N
(kiloniuton)
- **Moment siły:** Nm (Niutonometr)

Stopnie swobody

Stopniem swobody nazywa się możliwość wykonania ruchu ciała niezależnego od innych ruchów.

Punkt materialny ma na płaszczyźnie **dwa**, a w przestrzeni **trzy** stopnie swobody.

Ciało doskonale sztywne ma na płaszczyźnie **trzy**, a w przestrzeni **sześć** stopni swobody.

Więzy

Więżami nazywamy warunki ograniczające ruch ciała w przestrzeni.

Wprowadzenie więzów jest równoznaczne z działaniem na ciało **sił biernych**, czyli **reakcji**.

Najczęstszymi sposobami podparcia ciał sztywnych są:

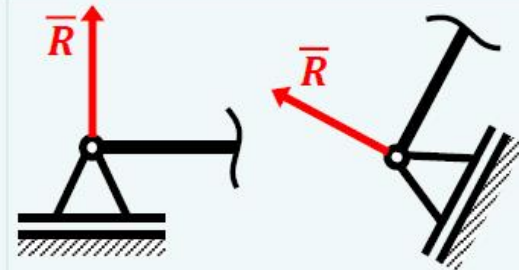
Więzy

Więzy – elementy ograniczające liczbę stopni swobody.

Charakterystyczne rodzaje więzów i związane z nimi siły reakcji.

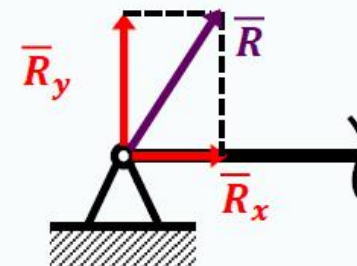
a) podpora przegubowa przesuwna

reakcja prostopadła do płaszczyzny przesuwu



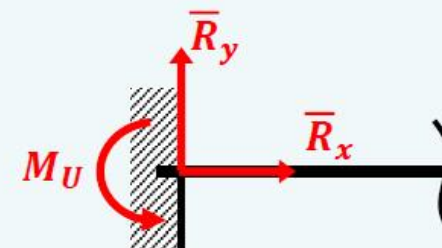
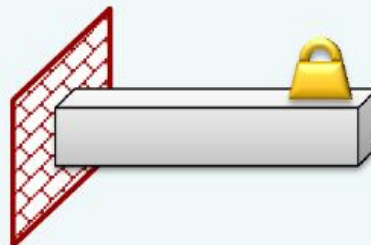
b) podpora przegubowa stała

siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji)



c) utwierdzenie (wspornik)

siła reakcji o dowolnym kierunku (dwie składowe reakcji) oraz moment utwierdzenia



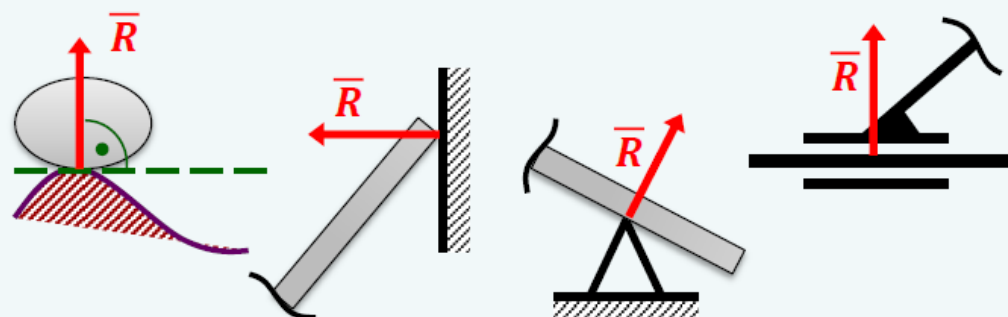
Więzy

Więzy – elementy ograniczające liczbę stopni swobody.

Charakterystyczne rodzaje więzów i związane z nimi siły reakcji.

d) gładka powierzchnia oporowa

reakcja prostopadła do gładkiej powierzchni



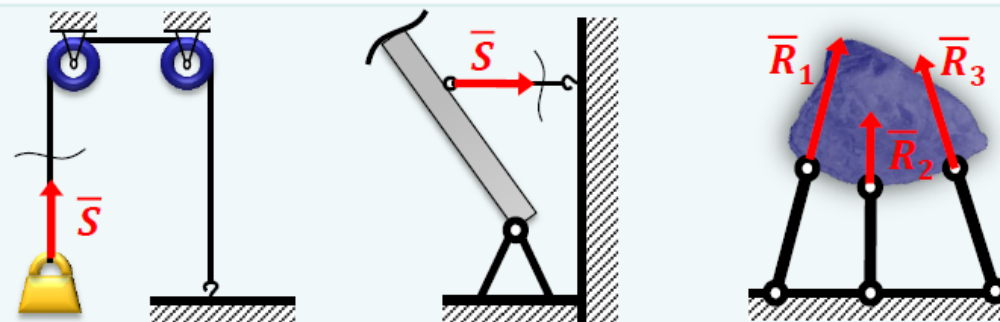
e) przegub kulisty

siła reakcji o dowolnym kierunku (trzy składowe reakcji)



f) podwieszenie na cięgnach, podparcie przegubowe

siła reakcji działa wzdłuż cięgna lub nieważkiego pręta



Układ sił – dowolna grupa oddziaływań ciał zewnętrznych na analizowane ciało.

Równoważne układy sił

Dwa układy sił są równoważne wtedy, gdy zastąpienie jednego układu, działającego na ciało sztywne, przez drugi układ sił **nie wywoła zmiany ruchu**, czyli nie spowoduje zmiany kierunku ruchu, prędkości, przyspieszenia, itd.

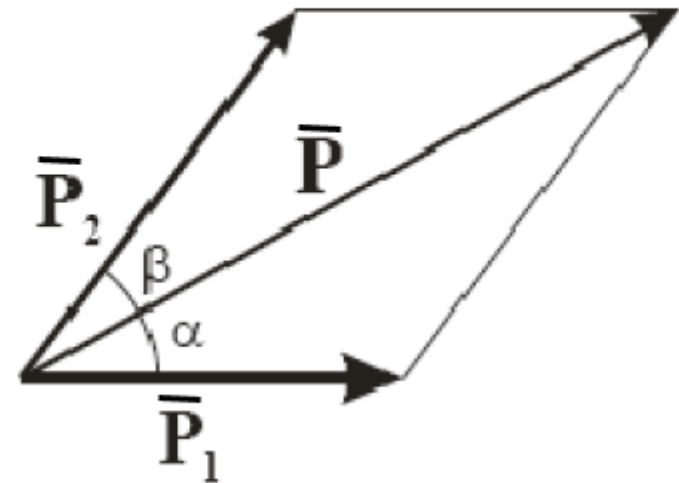
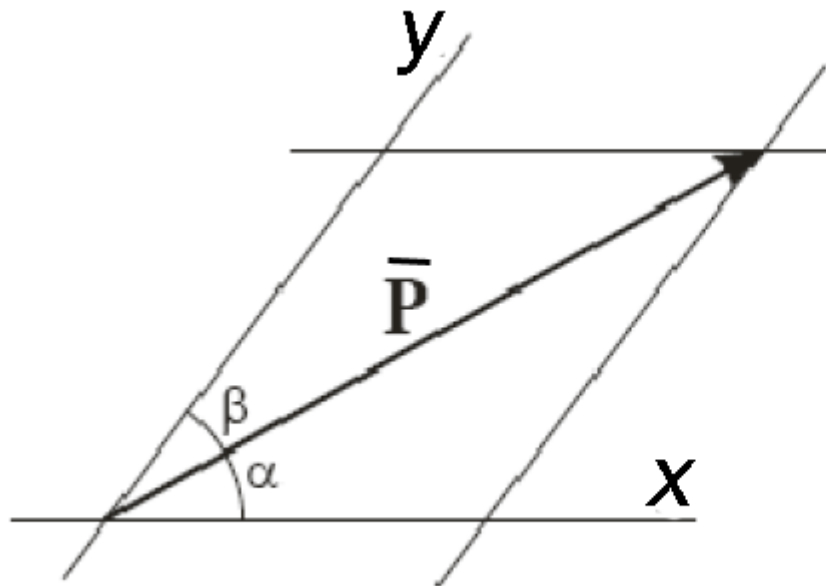
Układ sił nazywamy **płaskim**, jeżeli kierunki wszystkich sił tego układu położone są w jednej płaszczyźnie.

W każdym innym przypadku układ nazywamy **przestrzennym**

Siła wypadkowa – Pojedynczy wektor, który jest sumą wszystkich wektorów sił z układu, przyłożonego do punktu materialnego i stanowi układ równoważny, pod warunkiem, że siła wypadkowa jest przyłożona do tego samego punktu materialnego.

Rozkładanie siły na składowe

Przez początek i koniec danej siły przeprowadza się kierunki, na które siła ma zostać rozłożona. Siły składowe mogą zostać wyznaczone jako boki tak zbudowanego równoległoboku.

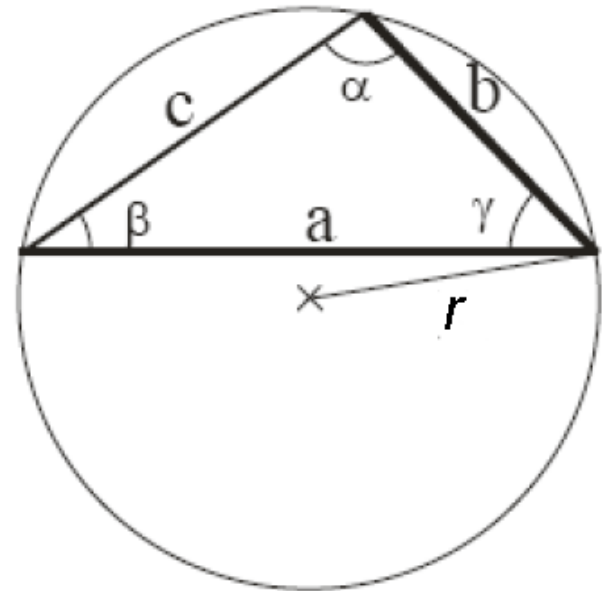


Rys. 9.

Twierdzenie sinusów

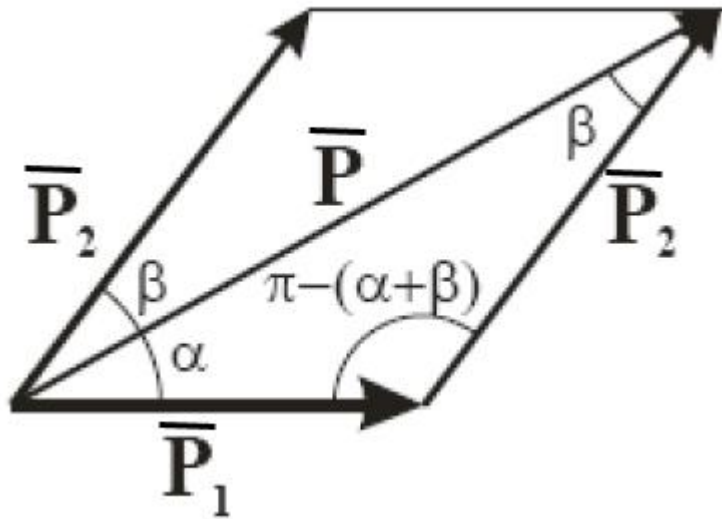
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa przeciwległego kąta jest stały i równa się długości średnicy okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$



Rys. 10.

Miary wektorów składowych

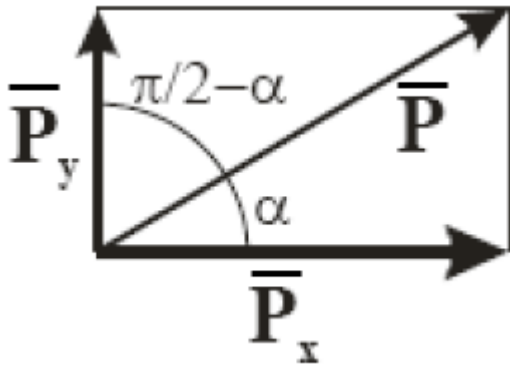


$$\frac{P_1}{\sin \beta} = \frac{P_2}{\sin \alpha} = \frac{P}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))}$$

$$P_1 = \frac{P \sin \beta}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{P \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$P_2 = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\pi - (\alpha + \beta))} = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\pi}{2} = \alpha + \beta$$



$$P_x = \frac{P \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin \frac{\pi}{2}} = P \cos \alpha$$

$$P_y = \frac{P \sin \alpha}{\sin \frac{\pi}{2}} = P \sin \alpha$$

Opis siły i promieni na płaszczyźnie

Współrzędne punktu lokacyjnego A prostej działania siły $\bar{P}$ oraz współrzędne bieguna (B)

$$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B)$$

Wektor siły

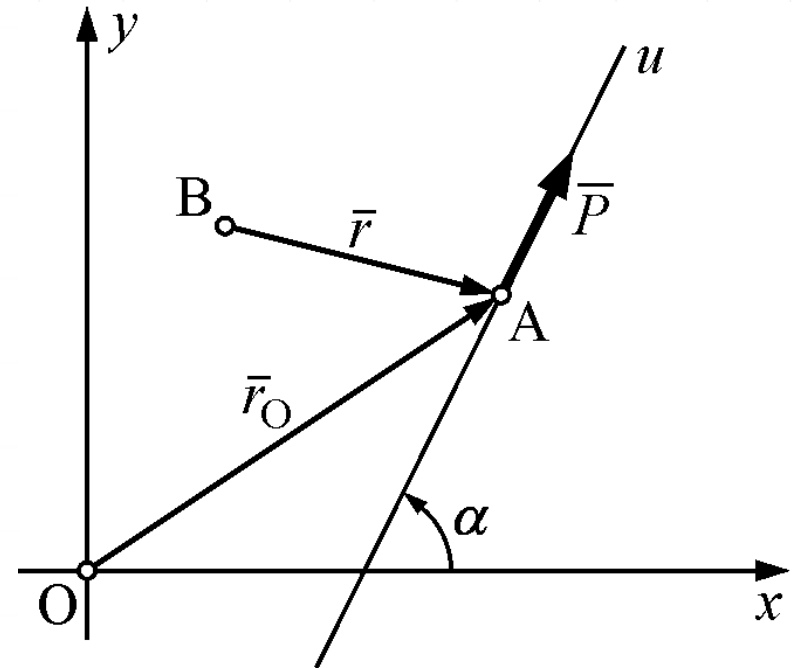
$$\bar{P} = P_x \bar{i} + P_y \bar{j}$$

Moduł siły (wartość)

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

Promień siły $\bar{P}$ względem punktu B

$$\bar{r} = r_x \bar{i} + r_y \bar{j}$$



Rys. 10.

Składowe promienia $\bar{r}$

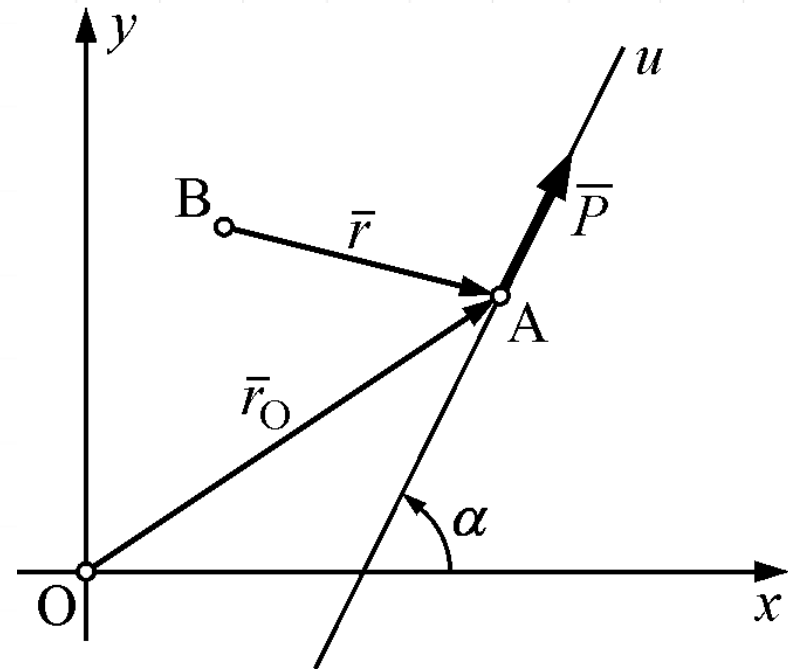
$$r_x = x_A - x_B \quad r_y = y_A - y_B$$

Promień siły względem punktu O

$$\bar{r}_O = r_{Ox} \bar{i} + r_{Oy} \bar{j}$$

Składowe promienia $\bar{r}_O$

$$\bar{r}_{Ox} = x_A \quad \bar{r}_{Oy} = y_A$$



Rys. 10.

Siła na płaszczyźnie opisana jest przez 4 wielkości

$$\bar{P}_x, \bar{P}_y, x_A, y_A \quad \text{lub} \quad \bar{P}, \alpha, x_A, y_A$$

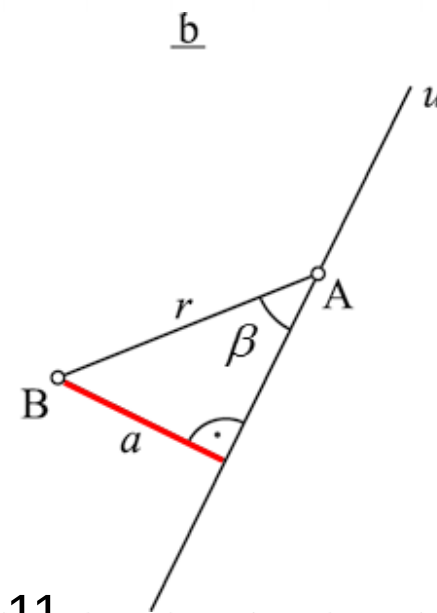
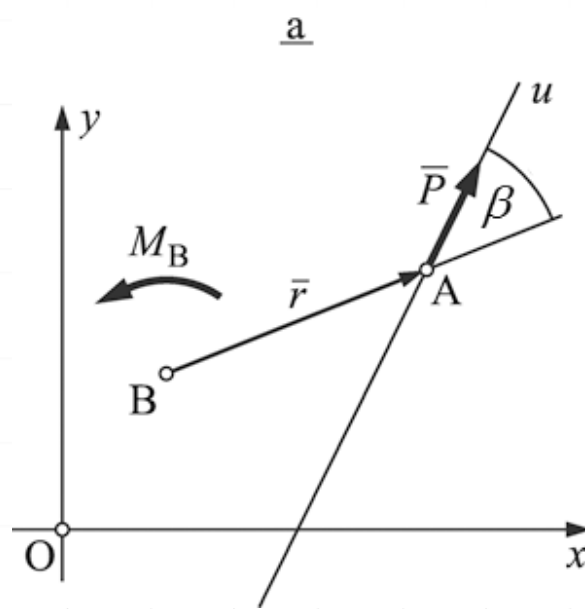
Kąt α nazywamy kątem kierunkowym prostej działania siły

Moment siły

Momentem siły $\vec{P}$ względem punktu B nazywamy wektor

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{P}$$

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że moment $\vec{M}_B$ jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny $x y$, o zwrocie zgodnym z regułą prawej dłoni i wartości przedstawionej na rysunku (a)



Rys. 11.

Moment siły

a jest ramieniem siły względem punktu B , a kąt β jest zawarty między wektorami $\vec{r}$ i $\vec{P}$ (b)

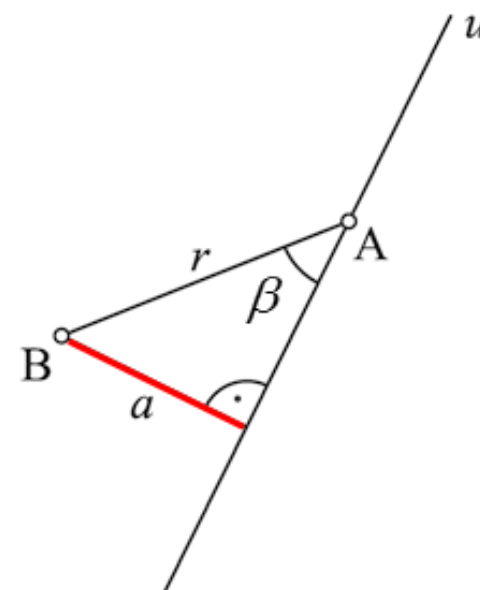
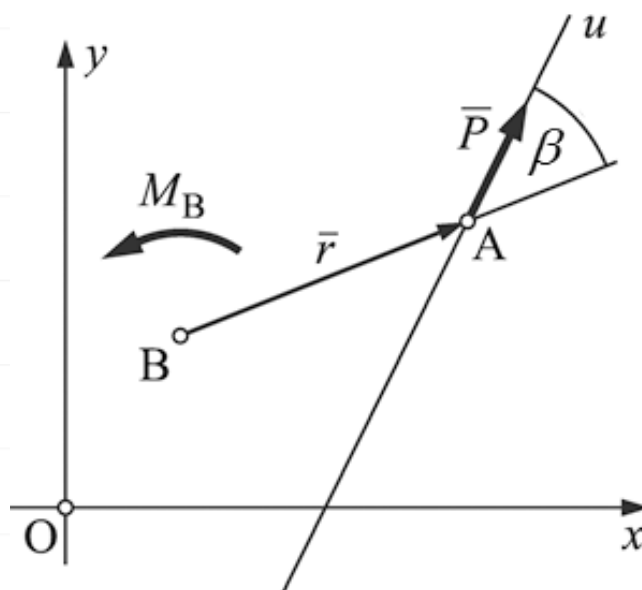
$$M_B = P \cdot r \cdot \sin \beta$$

$$a = r \cdot \sin \beta$$

a

$$M_B = P \cdot a$$

b



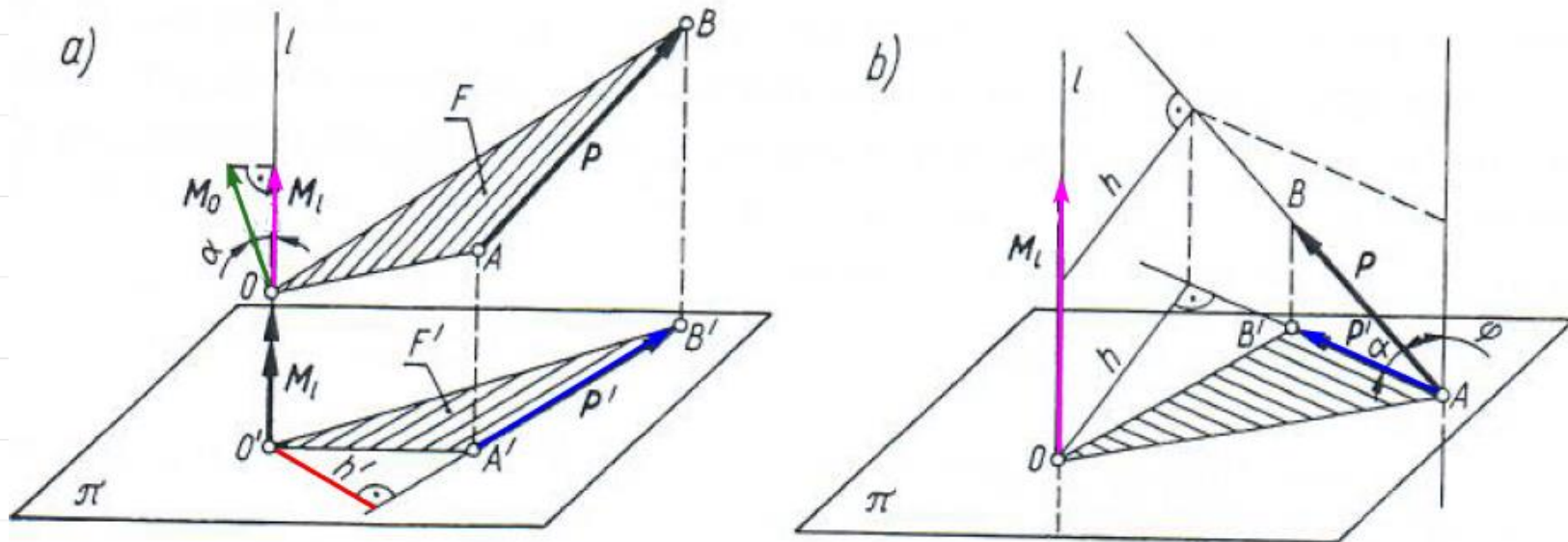
Rys. 11.

Wartość momentu M_B nie zależy od wyboru punktu A na prostej działania siły $\vec{P}$

Moment siły względem osi

Momentem siły $\mathbf{P}$ względem osi l nazywamy rzut wektora na tę oś momentu siły względem dowolnego punktu na osi:

$$M_l = M_l |\bar{\mathbf{P}}| = M_0 P \cos \alpha \quad M_l = P' \cdot h \quad P' = P \cos \alpha = P \sin \varphi$$



Rys. 12.

Moduł momentu siły $\mathbf{P}$ względem osi l równa się iloczynowi modułu tej siły $\mathbf{P}$ i jej odległości h od osi l pomnożonemu przez kąta zawartego między siłą $\mathbf{P}$ a prosta l .

$$M_l = P \cdot h \sin \varphi$$

Moment siły względem osi

Siłę $\mathbf{P}$ dowolnie skierowana w przestrzeni można rozłożyć na składowe (Rys. 13).

Oznaczając przez x, y, z współrzędne dowolnego punktu A leżącego na linii działania siły, a przez $\mathbf{r}$ promień –wektor tego punktu otrzymuje się:

$$\bar{M}_0 = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{P}} = (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) \times (P_x\bar{i} + P_y\bar{j} + P_z\bar{k})$$

Lub

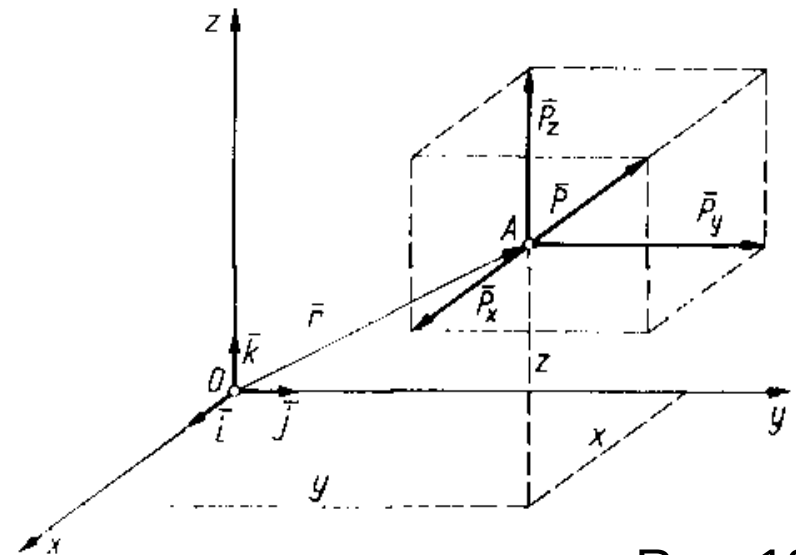
$$\bar{M}_0 = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{P}} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

Moment siły względem osi w zapisie analitycznym

$$\bar{M}_0 = \bar{i}(yP_z - zP_y) + \bar{j}(zP_x - xP_z) + \bar{k}(xP_y - yP_x)$$

Z określenia momentu wektora względem osi możemy zauważyć, że rzuty momentu $\bar{M}_0$ siły $\bar{P}$ względem początku układu współrzędnych O na osie prostokątnego układu współrzędnych są równocześnie momentami tego wektora względem osi x, y, z.

$$M_x = yP_z - zP_y, \quad M_y = zP_x - xP_z, \quad M_z = xP_y - yP_x$$



Rys. 13.

Moment siły względem osi

Rzut na oś momentu siły względem punktu O na osi nie zależy od położenia punktu na osi.

Pamiętaj!!!

Moment siły względem osi jest równy zero, gdy:

- Wartość siły $P=0$,
- Linia działania siły $\bar{P}$ przecina się z osią ($r_A=0$),
- Siła $\bar{P}$ jest równoległa do osi l.

Przykład. Dana jest siła $\bar{P} = -2\bar{i} + 5\bar{j} - 10\bar{k}$ zaczepiona w punkcie A o współrzędnych $x=2, y=3, z=5$. Obliczyć momenty siły $\bar{P}$ względem każdej osi układu współrzędnych.

Rozwiązanie

$$\bar{M}_0 = \bar{r}_A \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & -10 \end{vmatrix} = -55\bar{i} + 10\bar{j} + 16\bar{k}$$

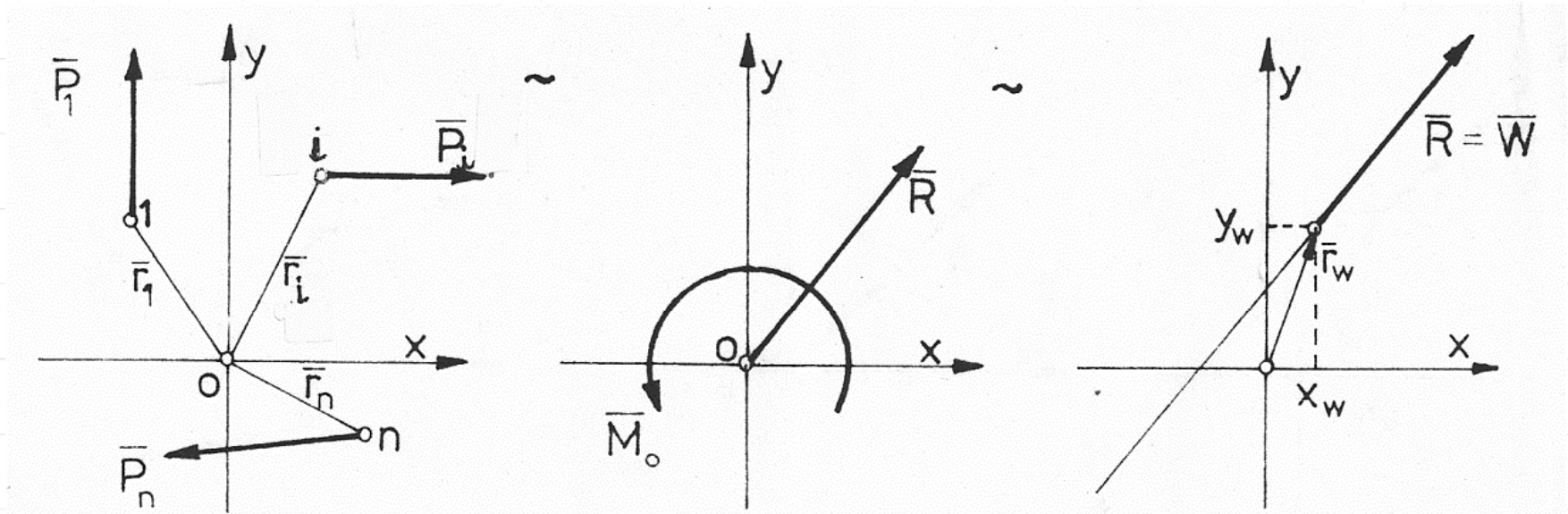
$$M_x = -55,$$

$$M_y = 10,$$

$$M_z = 16$$

Redukcja płaskiego układu sił

Płaskim układem sił nazywać będziemy układ „n” sił, których linie działania leżą w jednej płaszczyźnie. Za tę płaszczyznę przyjmiemy płaszczyznę „x y”



$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

Sumę sił

nazywać będziemy **wektorem głównym układu sił**.

Sumę momentów sił względem dowolnego punktu

$$\overline{M}_O = \sum_{i=1}^n (\overline{r}_i \times \overline{P}_i)$$

nazywać będziemy **momentem głównym układu sił** względem tego punktu.

Zapis analityczny siły redukuje się do postaci

$$\overline{P}_i = \bar{i}P_{ix} + \bar{j}P_{iy}$$

Korzystając z definicji momentu względem osi, moment główny może być zapisany również w postaci

$$\overline{M}_O = \bar{k} \sum_{i=1}^n \overline{M}_{iz} = M_O \bar{k}$$

gdzie M_O jest algebraiczną wartością momentu głównego.

Z warunku prostopadłości wektorów $\overline{M}_O$ i $\overline{R}$ jest następujący wniosek:

Jeżeli płaski układ sił posiada różny od zera wektor główny $\overline{R} \neq \overline{0}$ to posiada wypadkową $\overline{W} = \overline{R}$. Jeżeli natomiast $\overline{R} = \overline{0}$ to układ sił może (ale nie musi) redukować się do pary, której wektor jest prostopadły do płaszczyzny działania sił.

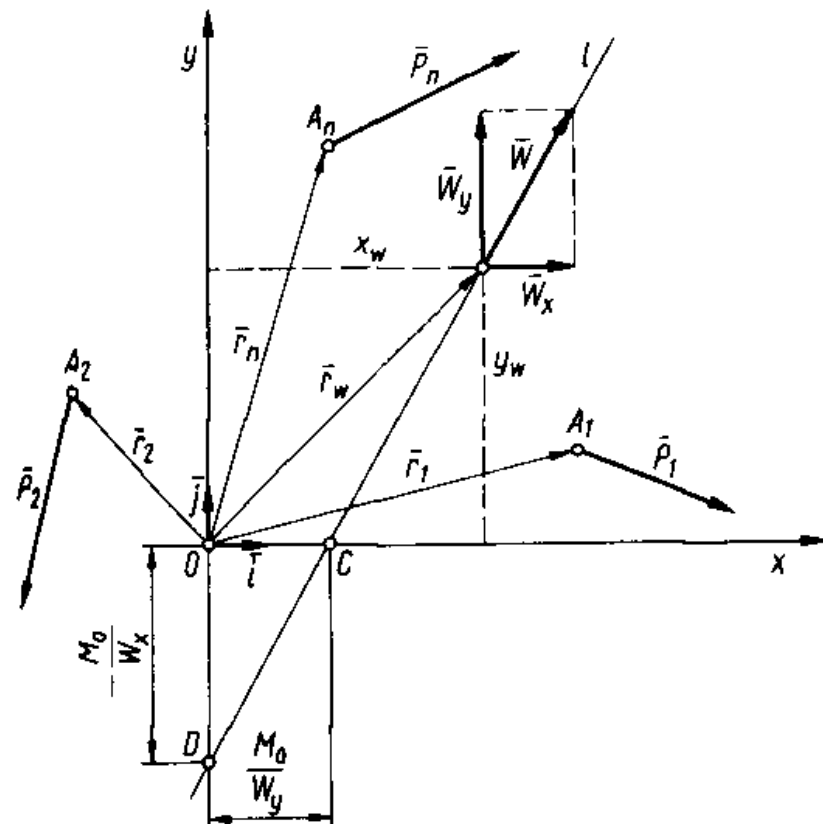
Ostatecznie równanie prostej działania wypadkowej

$$\overline{r}_W \times \overline{W} = \overline{M}_O$$

$$xW_y - yW_x = M_O$$

lub odcinkowej

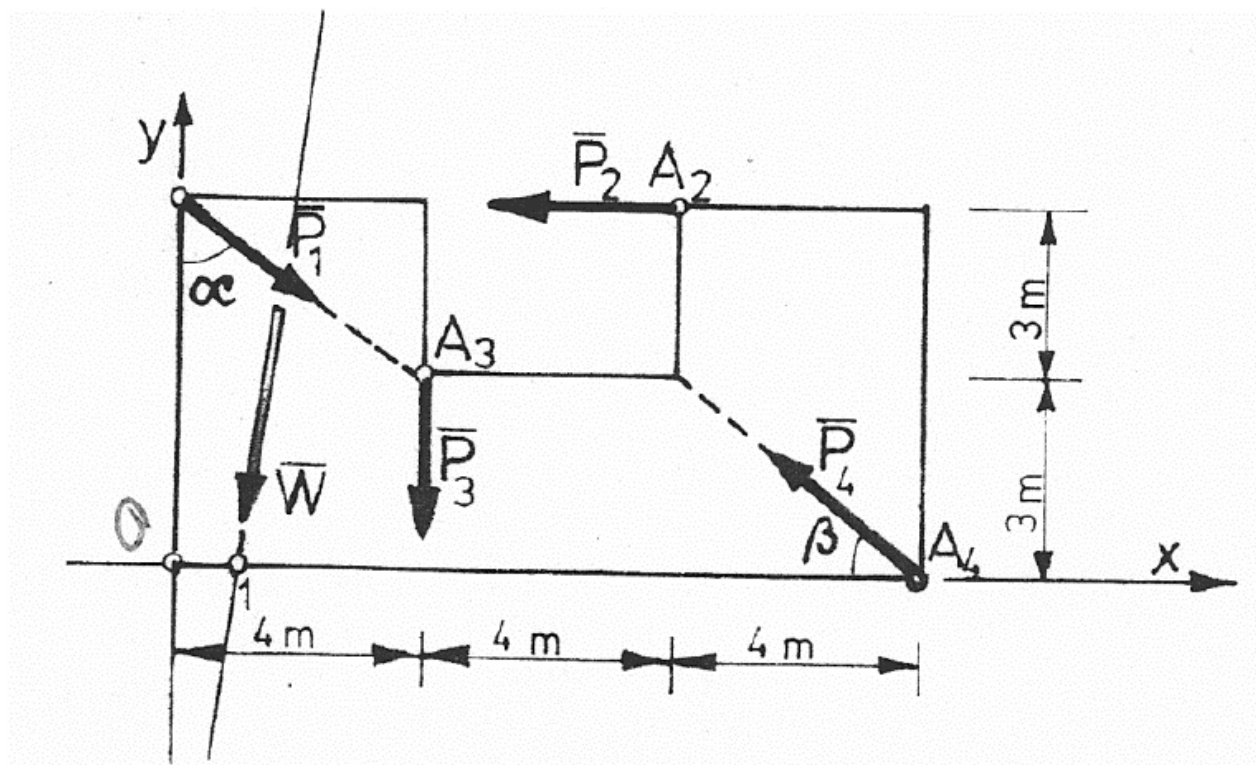
$$\frac{x}{\frac{M_O}{W_y}} + \frac{y}{\frac{-M_O}{W_x}} = 1$$



Przykład

Znaleźć wypadkową układu sił działających na tarczę przedstawioną na Rys.1.
Przyjąć następujące dane:

$$P_1 = 300\text{kN}, \quad P_2 = 200\text{kN}, \quad P_3 = 200\text{kN}, \quad P_4 = 100\text{kN}.$$



Rys.1.

Rozwiązanie

Z zależności geometrycznych mamy:

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \beta = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{4}{5}.$$

Współrzędne wypadkowej wynoszą:

$$W_x = \sum P_{ix} = P_1 \sin \alpha - P_3 - P_4 \cos \beta = 300 \cdot \frac{4}{5} - 200 - 100 \cdot \frac{4}{5} = -40 \text{ kN},$$
$$W_y = \sum P_{iy} = -P_1 \cos \alpha - P_3 - P_4 \sin \beta = -300 \cdot \frac{3}{5} - 200 + 100 \cdot \frac{3}{5} = -320 \text{ kN}.$$

Moment względem osi „z”

$$M_z = M_O = -P_1 \sin \alpha \cdot 6 + P_2 \cdot 6 - P_3 \cdot 4 + P_4 \sin \beta \cdot 12$$
$$M_O = -300 \cdot \frac{4}{5} \cdot 6 + 200 \cdot 6 - 200 \cdot 4 + 100 \cdot \frac{3}{5} \cdot 12 = -320 \text{ kNm}.$$

Zgodnie ze wzorem $\frac{x}{\frac{M_O}{W_y}} + \frac{y}{\frac{-M_O}{W_x}} = 1$

$$\frac{M_O}{W_y} = \frac{-320}{-320} = 1,0 \text{ m}, \quad \frac{-M_O}{W_x} = \frac{-(-320)}{-40} = -8,0 \text{ m},$$

$$\frac{x}{1,0} + \frac{y}{-8,0} = 1,0, \quad y = 8x - 8$$

Jest to poszukiwane równanie prostej działania wypadkowej

$$\overline{W} = -40\overline{i} - 320\overline{j}$$
$$W = \sqrt{(-40)^2 + (-320)^2} = 322,49 \text{ kN}.$$

Warunki równowagi

Dowolny układ sił jest w równowadze jeżeli wektor główny tego układu jest równy zeru oraz moment główny względem dowolnego punktu jest równy zeru, tzn.

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{0},$$
$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \bar{P}_i) = \bar{0}$$

Równania wektorowe zapisać można w następującej równoważnej postaci skalarnej:

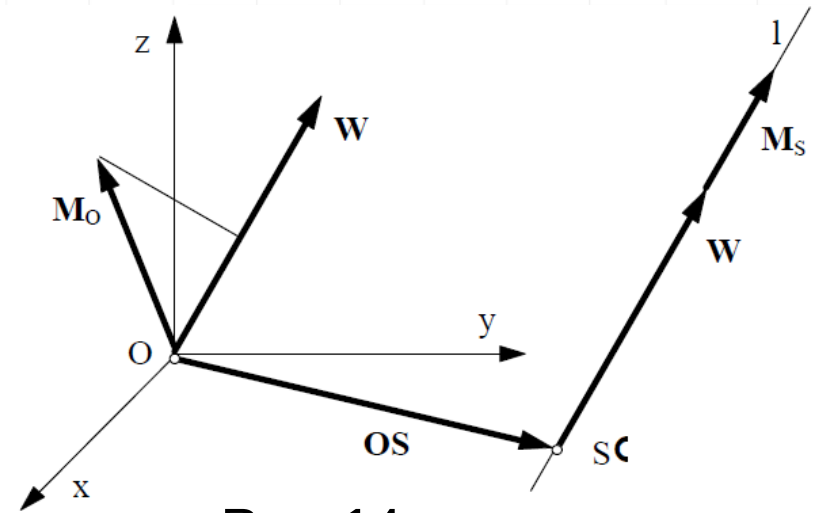
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

Redukcja płaskiego dowolnego układu, przestrzennego sił.

Skrętnik

Można znaleźć taki biegun redukcji S , że moment $\mathbf{M}^S$ będzie równoległy do wektora głównego $\mathbf{W}$. Taki układ sił będziemy nazywać **skrętnikiem**.



Rys. 14.

Skrętnikiem nazywamy układ składający się z siły $\mathbf{W}$ i pary sił o momencie $\mathbf{M}^S$ równoległym do siły $\mathbf{W}$.

Dla wyznaczenia momentu $\mathbf{M}^S$ (momentu skrętnika) oraz położenia punktu S , czyli wektora $\mathbf{OS}$, przyjmiemy, że dany jest wektor główny $\mathbf{W}$ i moment główny $\mathbf{M}^O$ względem dowolnego bieguna O .

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_S = W M_S ,$$

Stąd moduł:

$$M_S = \frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O}{W}$$

Po pomnożeniu tego wzoru przez wektor jednostkowy o kierunku wektora głównego $\mathbf{W}$ otrzymamy wzór na moment $\mathbf{M}^S$

$$\mathbf{M}_S = \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{M}_O) \mathbf{W}}{W^2}$$

Dziękuję za uwagę



Krzysztof Jamroziak