

Mechanika techniczna
Kod grupy: R00-48a
MMM012013

Kratownice. Reakcje. Siły wewnętrzne

Katedra Mechaniki i Inżynierii Materiałowej

Krzysztof Jamroziak

e-mail: krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl

Tel. 71 320 27 60

Konsultacje: środa: godz. 13.00-15.00

czwartek: godz. 12.00-13.00



HR EXCELLENCE IN RESEARCH

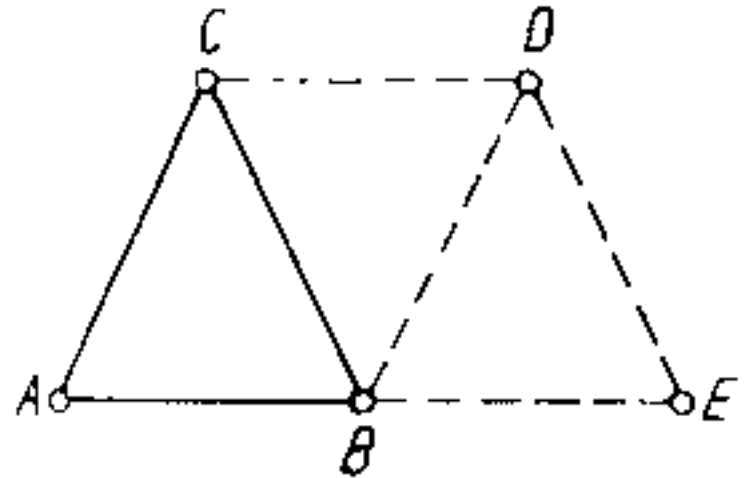


Wrocław University
of Science and Technology

Kratownice

Kratownicą nazywamy układ prostoliniowych prętów pryzmatycznych (o stałym przekroju) połączonych ze sobą w węzłach za pomocą pozbawionych tarcia przegubów.

Sposób budowania kratownicy

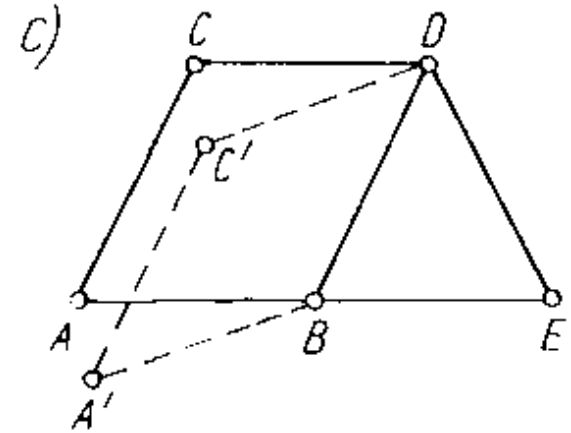
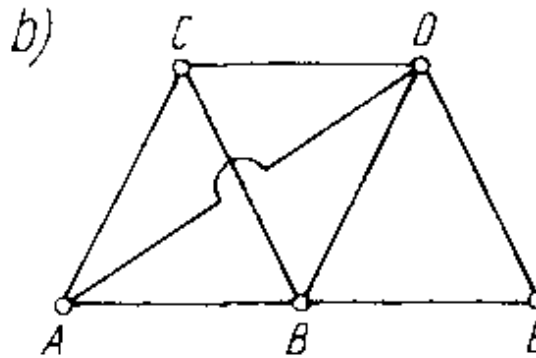
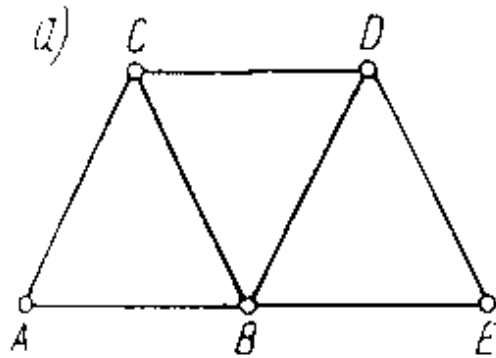


Kratownice płaskie mogą stanowić samodzielną konstrukcję nośną, bądź być częścią większej konstrukcji – kratownicy przestrzennej.

Najbardziej typowym rozwiązaniem wykorzystującym kratownice jako konstrukcje nośne są wszelkiego rodzaju ustroje utrzymujące stropy budynków, hal itp.

Kratownice

Przykłady kratownic płaskkich.



- a) Statycznie wyznaczalnych;
- b) Statycznie niewyznaczalnych;
- c) Geometrycznie zmiennych.

Kratownica żeby była sztywna i niezmiennie geometrycznie to

$$p = 2w - 3$$

$$p = 3w - 6$$

p – pręty
w – węzły

Przykłady kratownic



Równowaga trzech sił

Rozwiązywanie kratownicy polega na znalezieniu sił wewnętrznych w prętach dla danego obciążenia zewnętrznego kratownicy.

Przy rozwiązywaniu kratownic najczęściej zakładamy:

- 1) siły są w równowadze, zarówno dla całej kratownicy jak i dla poszczególnych węzłów,
- 2) siły przyczepione są w węzłach kratownicy,
- 3) pręty połączone są w węzłach przegubami idealnymi, tj. bez tarcia,
- 4) kratownica jest sztywna, tzn. przy założeniu prętów jako doskonale sztywnych i przegubów idealnych, dwa dowolne węzły nie mogą się przemieszczać względem siebie.

Metody rozwiązywania kratownic

Siły w prętach kratownic statycznie wyznaczalnych wyznaczamy korzystając tylko z warunków równowagi.

W zależności od sposobu korzystania z warunków równowagi istnieje kilka metod wyznaczania sił w prętach kratownic.

Metody analityczne

- metoda zrównoważenia węzłów,
- metoda Rittera - zrównoważenie odciętych części kratownicy.

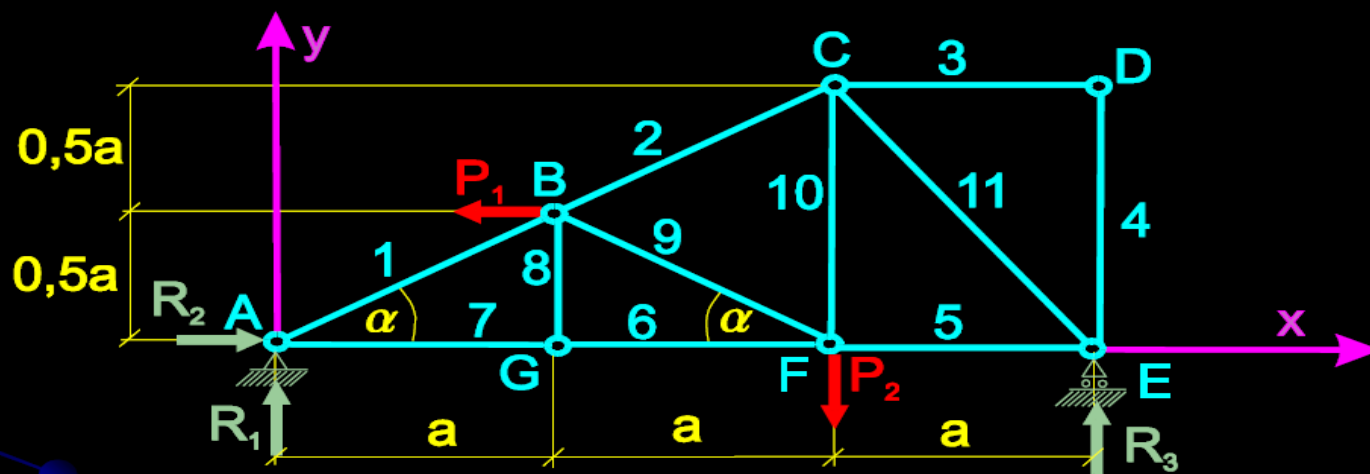
Metody wykreślne

- metoda Cremony - graficznego zrównoważenia węzłów,
- metoda Culmanna - graficznego zrównoważenia odciętych części kratownicy.

Metoda wydzielenia węzłów

- 1) Sprawdzamy czy kratownica jest statycznie wyznaczalna.
- 2) Narysować zwroty sił w prętach i zorientować układ.
- 3) Obliczyć reakcje w podporach
- 4) Napisać równania równowagi sił działających na myślowo wyciętych węzłach kratownicy, rozpoczynając od węzła, w którym występują 2 siły niewiadome.
- 5) Siły wewnętrzne w prętach.
- 6) Wykonać tabelę.
- 7) Dokonać sprawdzenia.

Metoda węzłów

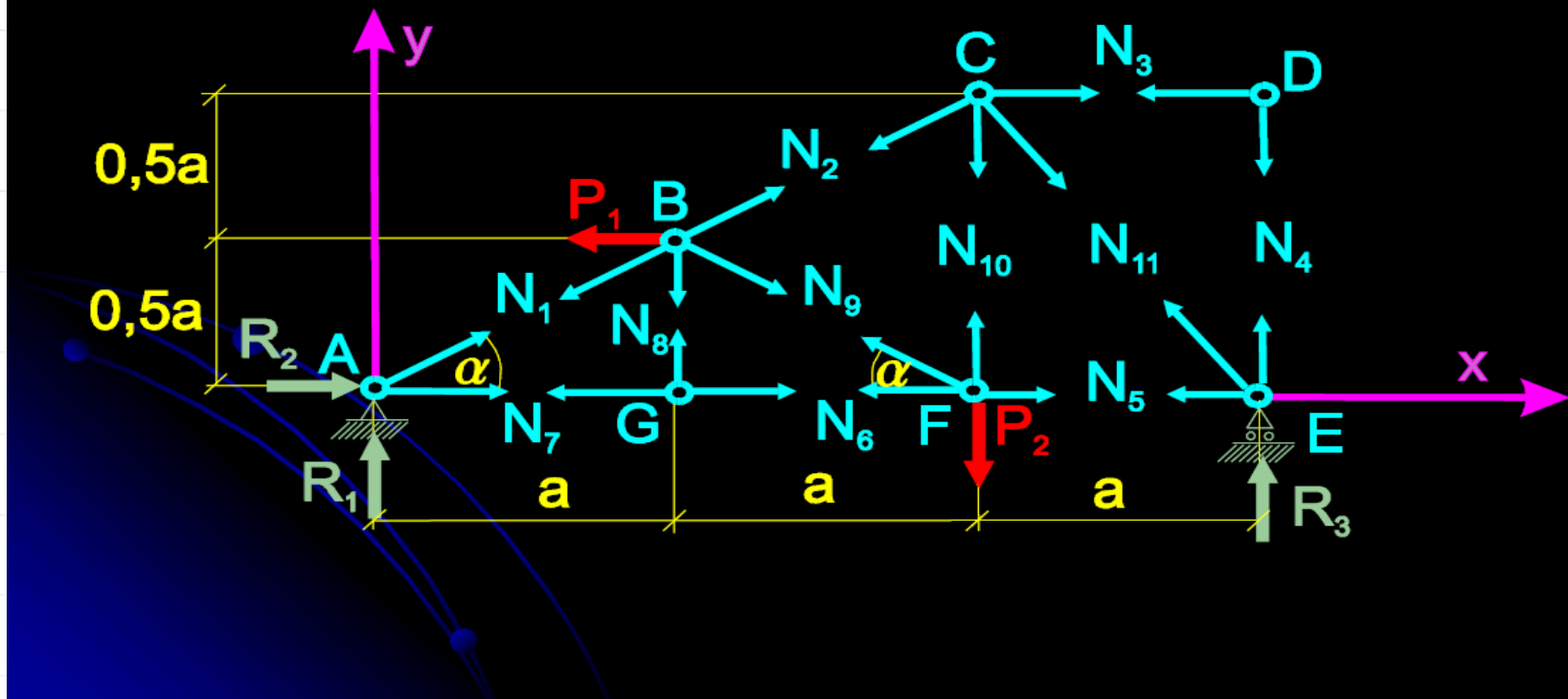


Reakcje:

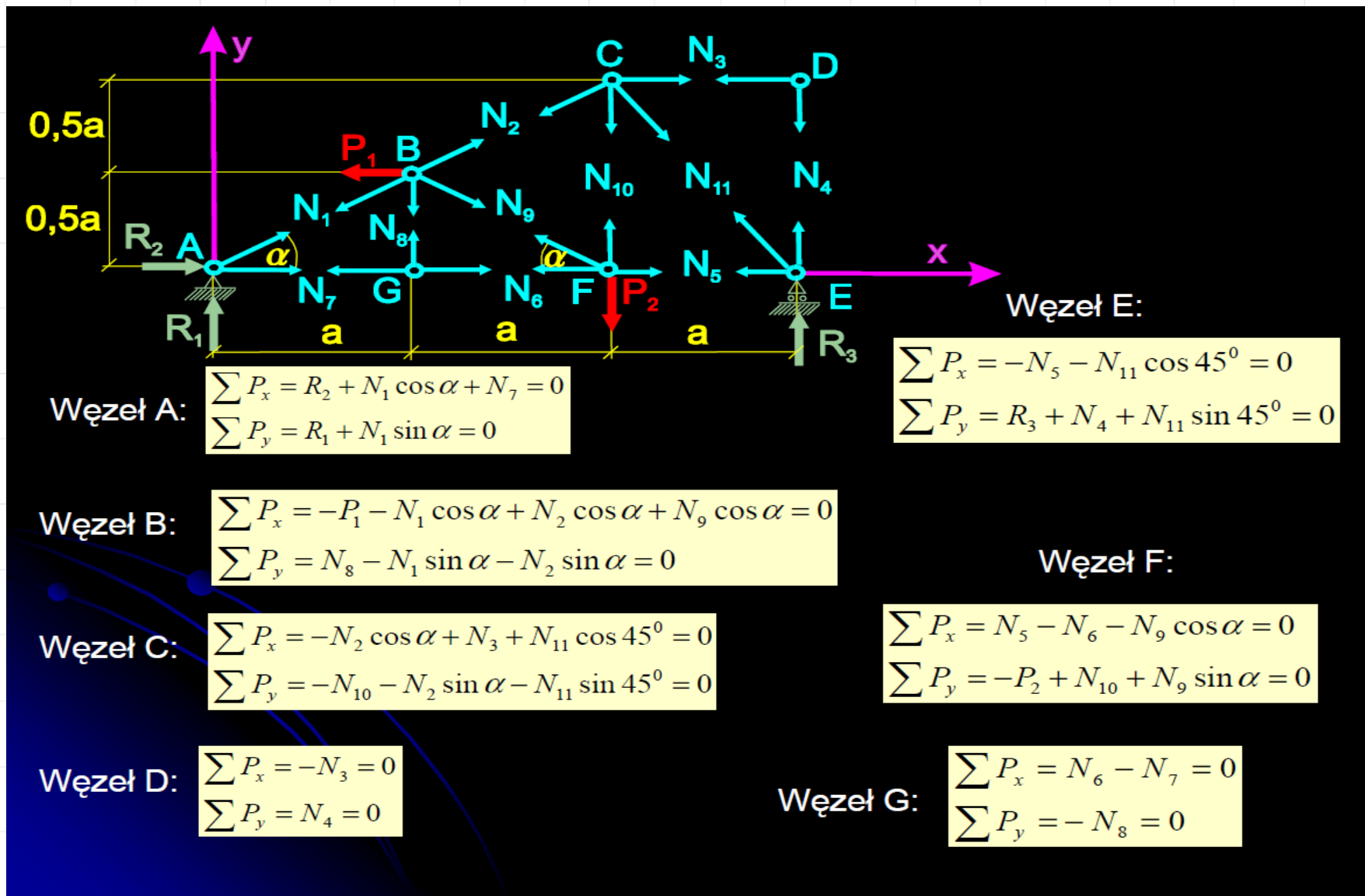
$$\begin{cases} \sum P_x = R_2 - P_1 = 0 \\ \sum P_y = R_1 + R_3 - P_2 = 0 \\ \sum M_{iA} = -3aR_3 + 2aP_2 - 0,5aP_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 = P_1 \\ R_1 = P_1 \\ R_3 = 1,5 \cdot P_1 \end{cases}$$

Metoda węzłów



Metoda wydzielenia węzłów



Metoda wydzielenia węzłów

Sporządzenie tabeli.

Nr pręta	Wartość napięcia [kN]	
	(+)	(-)
1.		60
2.		70
3.	50	
4.	25	
5.		61
6.	92	

Metoda Rittera

Metoda ta jest wygodna, gdy nie interesują nas siły we wszystkich prętach kratownicy.

Metoda polega na tzw. przecięciu, która pozwala na wyznaczeniu tylko 3 sił wewnętrznych kratownicy w jej pomyślanym przekroju.

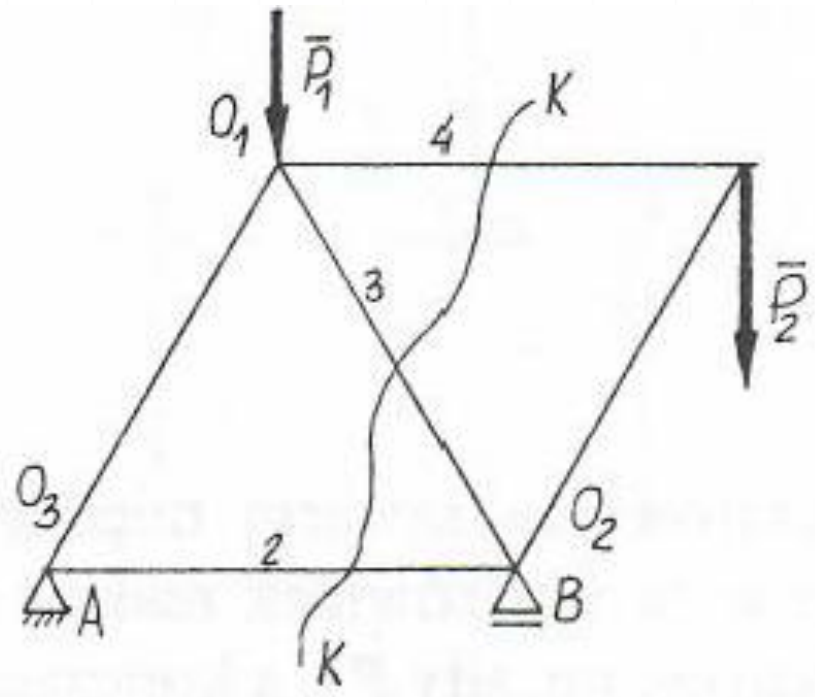
Zasada polega na takim przecięciu, aby 3 pręty nie przecinały się w jednym punkcie. Analiza równowagi polega na części odciętej. Równania równowagi:

Metoda Rittera

$$\sum_{i=1}^k M_{O_1 i} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^k M_{O_2 i} = 0,$$

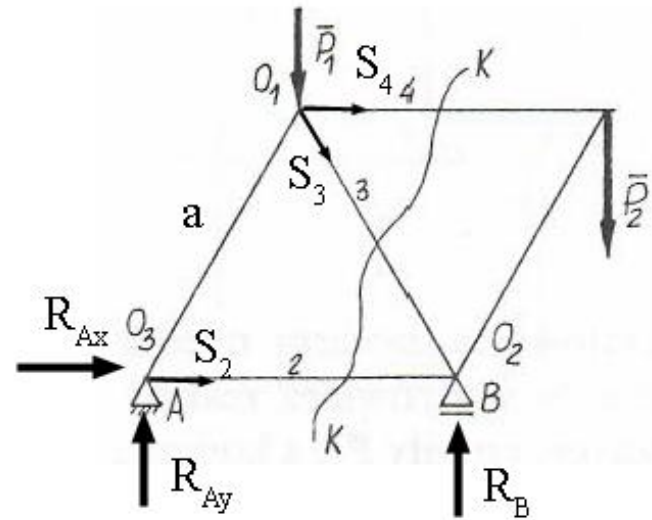
$$\sum_{i=1}^k M_{O_3 i} = 0,$$



Rys. 1.

Metoda Rittera

Z równań momentów względem bieguna O_1, O_2, O_3 ,



$$\sum M_{O_1 i} = R_{Ay} \cdot a \cos 60^\circ + S_2 \cdot a \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow S_2 = R_{Ax} \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ = R_{Ax} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

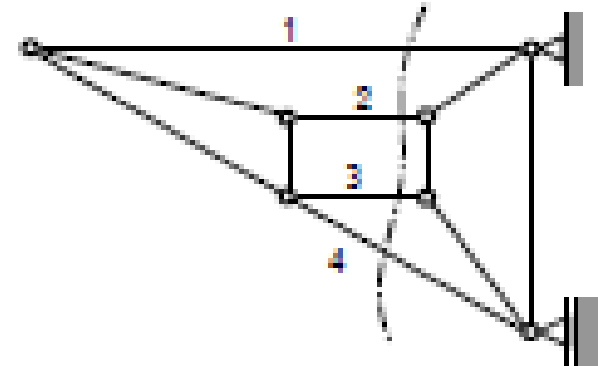
$$\sum M_{O_2 i} = R_{Ay} \cdot a + P_1 \cdot a \cos 60^\circ - S_4 \cdot a \sin 60^\circ = 0, \Rightarrow S_4 = \frac{2R_{Ay} + P}{2}$$

$$\sum_{i=1}^k M_{O_3 i} = P_1 \cdot a \cos 60^\circ + S_4 \cdot a \sin 60^\circ + S_3 \cdot a \sin 60^\circ = 0, \Rightarrow S_3 = -\frac{P_1}{\sqrt{3}} - S_4$$

Metoda Rittera

Uwagi:

Można przeciąć więcej niż 3 pręty, ale pod warunkiem, że oprócz jednego pozostałe są równoległe,



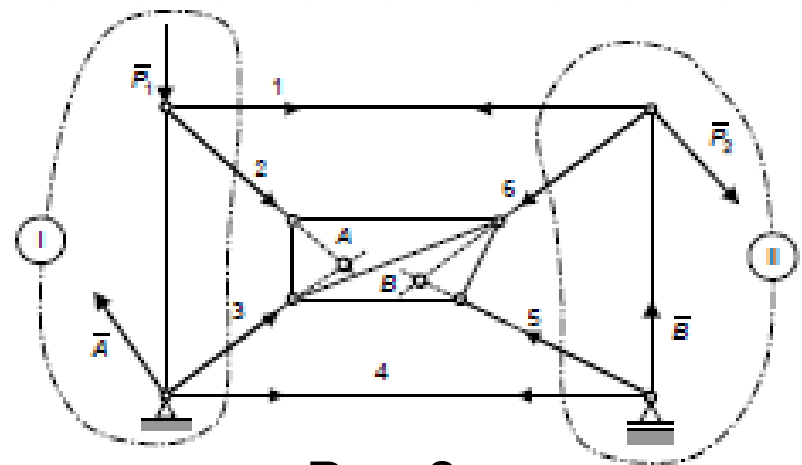
Rys. 2.

Przy złożonych kratownicach jeden przekrój może być niewystarczający, np.

$$M_A^I = f_1(S_1, S_4, P_1, A)$$

$$M_B^I = f_2(S_1, S_4, P_2, B)$$

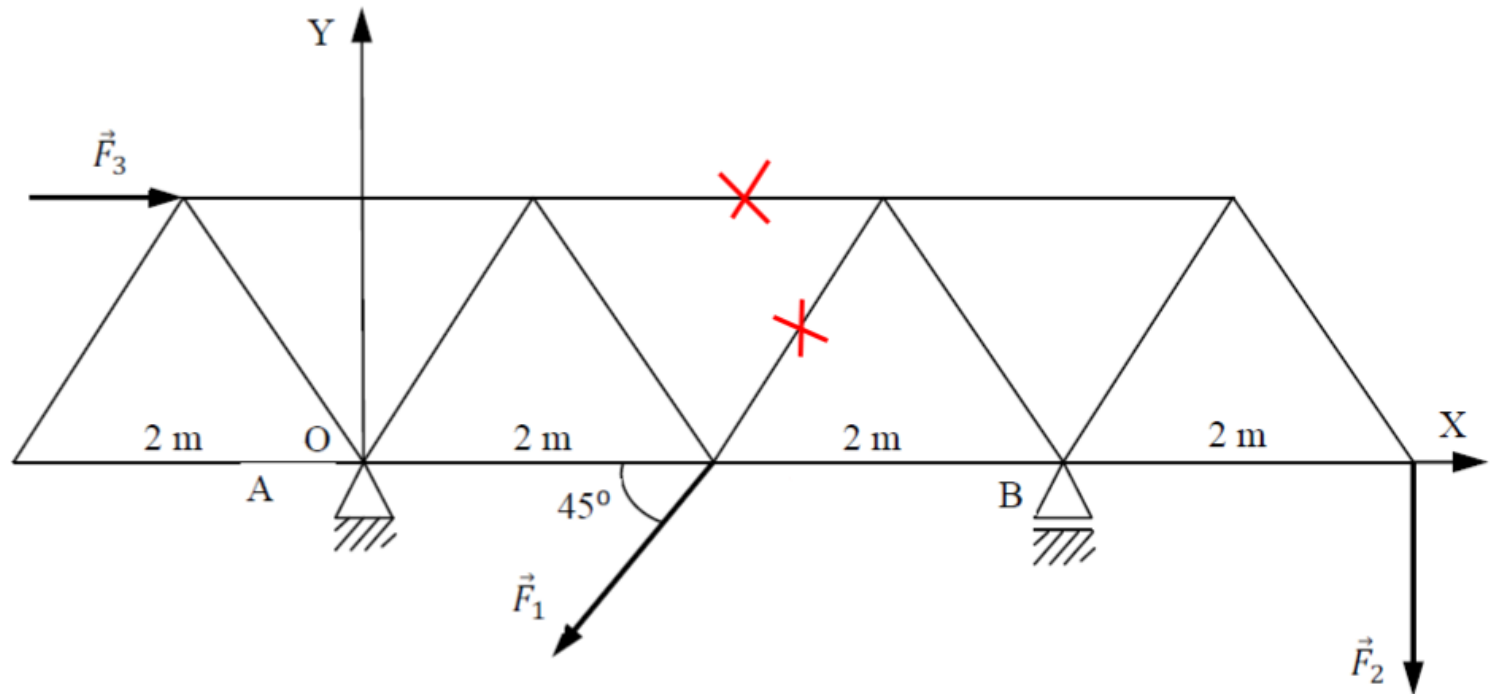
Skąd obliczamy siły S_1 i S_4 .



Rys. 3.

Przykład

Kratownica pokazana schematycznie na rysunku obciążona jest siłami o wartościach $F_1=100\text{kN}$, $F_2=200\text{kN}$, $F_3=50\text{kN}$. Pręty kratownicy tworzą trójkąty równoboczne o boku 2m . Należy wyznaczyć siły wewnętrzne we wskazanych prętach kratownicy (czerwony znacznik) metodą przecięć Rittersa.



Rozwiązanie

Sprawdzenie warunku koniecznej statycznej rozwiązywalności
kratownicy płaskiej:

$$n=2w-p-3$$

n – współczynnik statycznej wyznaczalności

w – liczba węzłów,

p – liczba prętów

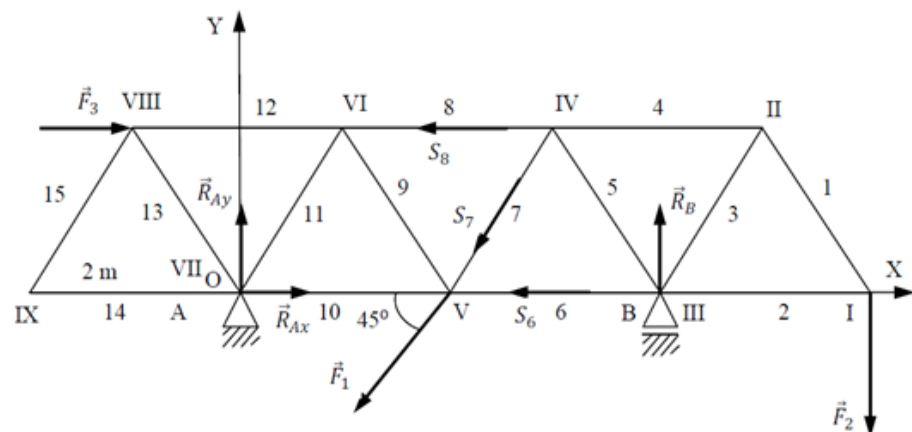
W tym przypadku: $p=15$, $w=9 \rightarrow n=18-15-3=0$

Wyznaczyć reakcje w podporach

$$\sum F_{ix} = F_3 + R_{Ax} - F_1 \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - F_1 \cos 45^\circ + R_B - F_2 = 0$$

$$\sum M_{iO} = -F_3 \cdot \sqrt{3} - F_1 \cos 45^\circ \cdot 2 + R_B \cdot 4 - F_2 \cdot 6 = 0$$



Rozwiązanie

Otrzymujemy wartości:

$$R_{Ax} = F_1 \cos 45^\circ - F_3 = 50\sqrt{2} - 50 = 50(\sqrt{2} - 1) \approx 20,71 [\text{kN}]$$

$$R_B = \frac{3}{2} F_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} F_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} F_1 \approx 357 [\text{kN}]$$

$$R_{Ay} = F_1 \sin 45^\circ - R_B + F_2 \approx -86,3 [\text{kN}]$$

Rozwiązanie

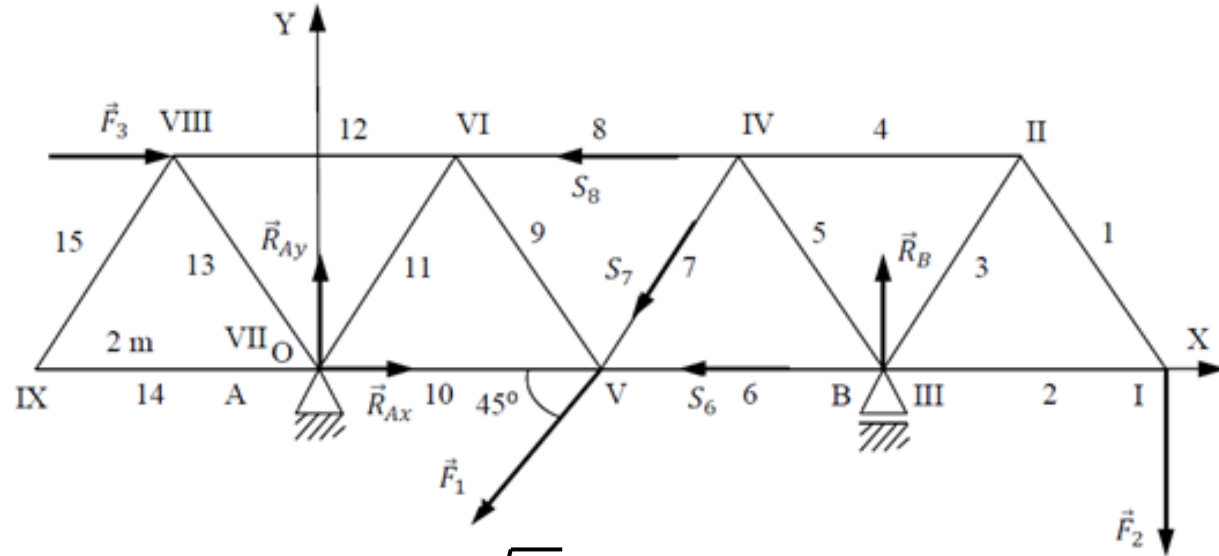
Metoda ta polega na myślowo rozcięciu kratownicy na 2 części. W zadaniu należy wyznaczyć siły wewnętrzne w 2 prętach, jednakże kratownice przecinamy w 3 prętach.

Należy pamiętać, że kratownicę tak przecinamy aby liczba prętów była tylko równa 3 (3RRS).

Odrzuca się myślowo jedną część kratownicy. W naszym przypadku odrzucamy lewą część. W miejsce odrzucone przykłada się siły wewnętrzne. Zakłada się zwroty sił w prętach.

Formuluje się równania równowagi statycznej sił działających tylko na część prawą.

Rozwiązanie



$$\sum M_{iIV} = R_B \cdot 1 - F_2 \cdot 3 - S_6 \cdot \sqrt{3} = 0$$

$$\sum M_{iV} = S_8 \cdot \sqrt{3} + R_B \cdot 2 - F_2 \cdot 4 = 0$$

$$\sum F_{iy} = -S_7 \cdot \cos 30^\circ + R_B - F_2 = 0$$

Z równań wyznaczamy wartości wybranych sił wewnętrznych prętów.

Rozwiązanie

Z równań wyznaczamy wartości wybranych sił wewnętrznych prętów.

$$S_6 = \frac{R_B - F_2 \cdot 3}{\sqrt{3}} \approx -140,3 \text{ [kN]}$$

$$S_7 = \frac{R_B - F_2}{\cos 30^\circ} \approx 181,3 \text{ [kN]}$$

$$S_8 = \frac{F_2 \cdot 4 - R_B \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 49,7 \text{ [kN]}$$

Pręty 7 i 8 są rozciągane a pręt 6 jest ściskany.