

Mechanika I

Kierunek: Transport

Katedra Mechaniki, Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej

Momenty bezwładności, transformacja równoległa

Krzysztof Jamroziak

e-mail: krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl

Tel. 71 320 27 60

Konsultacje: wtorek: godz. 13.00-15.00

środa: godz. 13.00-15.00



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Wrocław University
of Science and Technology

Momenty bezwładności

Oprócz momentów statycznych, które są momentami **stopnia pierwszego**, istnieją momenty **stopnia drugiego**, którymi są momenty bezwładności oraz momenty dewiacji (zboczenia). Mają one szczególne znaczenie w wytrzymałości materiałów.

Momenty bezwładności przekrojów

biegunowe

$$I_0$$

osiowe

$$I_y, I_z$$

odśrodkowe

$$I_{yz}$$

Momenty bezwładności

Definicja momentu bezwładności

$$J = mr^2$$

gdzie: J – masowy moment bezwładności

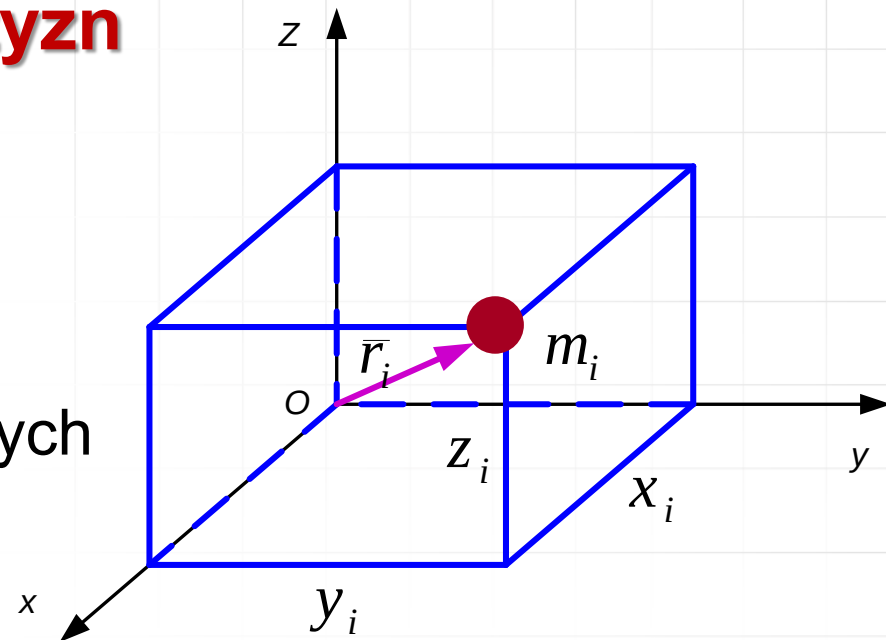
$$J = \rho J_V$$

gdzie: J_V – geometryczny moment bezwładności

$$\rho_l = \frac{m}{l}, \quad \rho_A = \frac{m}{A}, \quad \rho_V = \frac{m}{V}$$

Momenty względem płaszczyzn

Traktując ciało sztywne jako zbiór n -punktów materialnych w konkretnym układzie współrzędnych moment bezwładności względem płaszczyzn układu będzie się przedstawiał następująco (Rys. 1):



Rys. 1.

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad J_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$$

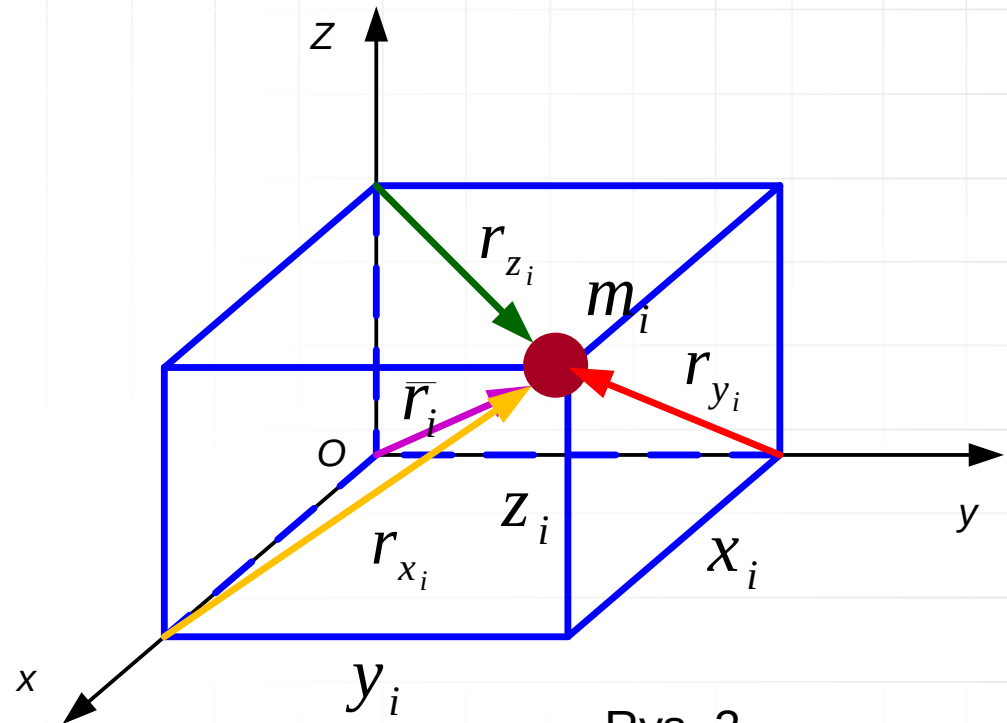
Momenty względem osi współrzędnych oraz biegunowy

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

$$J_y = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

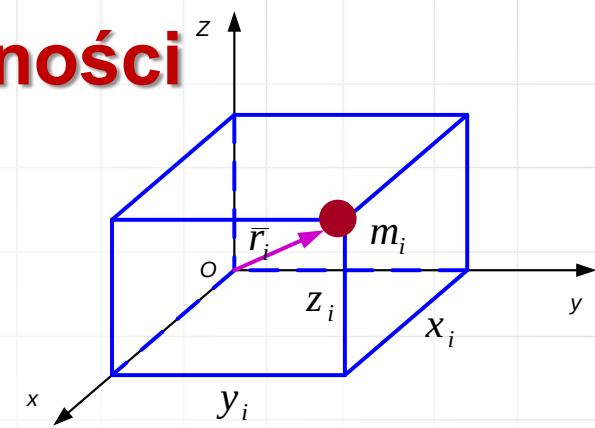
$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_0 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$



Rys. 2.

Związki między momentami bezwładności



Rys. 2.

Zauważamy (Rys. 2), że spełnione są następujące zależności:

$$J_x = \sum_{i=1}^n m_i r_{x_i}^2 = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 = J_{xz} + J_{yx}$$

$$J_x = J_{xy} + J_{xz}$$

$$J_y = J_{yx} + J_{yz}$$

$$J_z = J_{zx} + J_{zy}$$

Moment względem osi równa się **sumie momentów względem dwóch płaszczyzn prostopadłych**, w wyniku przecięcia których powstaje dana oś.

Związki między momentami bezwładności

Moment biegunowy przyjmuje postać:

$$J_0 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 +$$

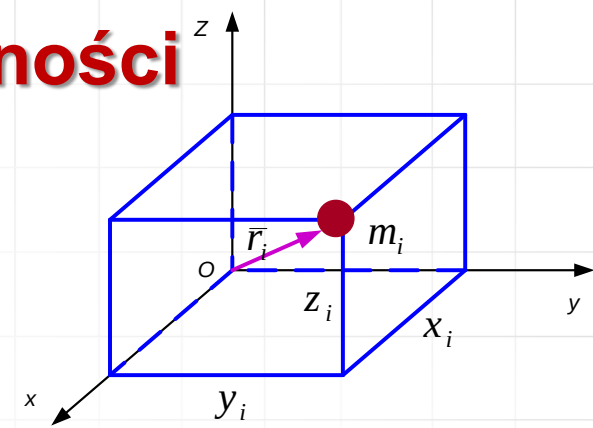
$$+ \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 = J_{yz} + J_{xz} + J_{xy}$$

$$J_0 = J_{xy} + J_{xz} + J_{yz}$$

Dodając biegunowy moment bezwładności po obu stronach powyższego równania otrzymamy:

$$2J_0 = J_{xy} + J_{xz} + J_{yz} + J_{xy} + J_{xz} + J_{yz} = J_x + J_y + J_z$$

$$J_0 = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z)$$



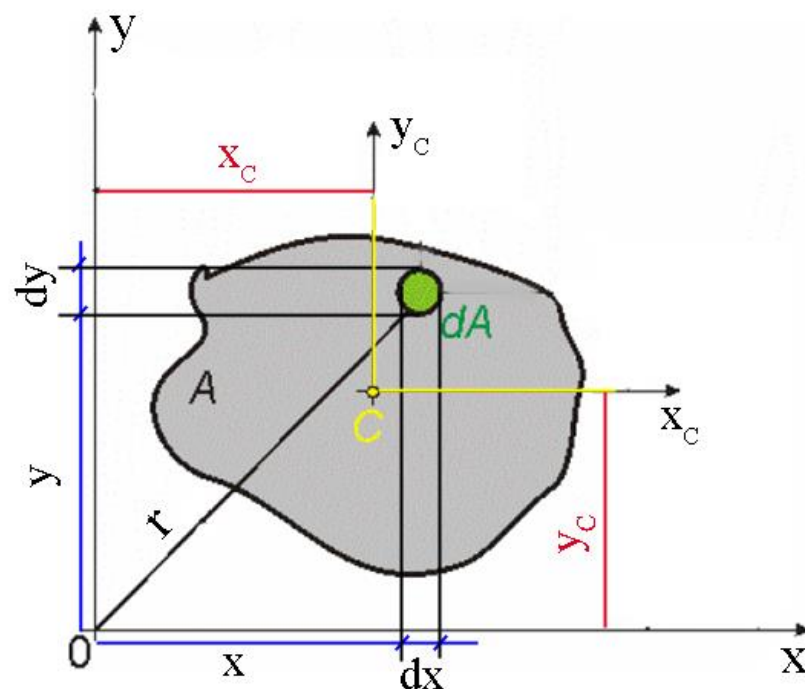
Rys. 2.

Biegunowy moment bezwładności

Biegunowym momentem bezwładności figury płaskiej nazywamy granicę algebraicznej sumy, dla całej powierzchni S figury płaskiej, iloczynów elementarnych pól dA przez kwadrat odległości od początku układu współrzędnych (Rys. 3), gdy elementarne pola dążą do zera.

czyli;
Biegunowym momentem bezwładności figury płaskiej o polu A względem bieguna O nazywamy:

$$J_0 = \int_A r^2 dA$$

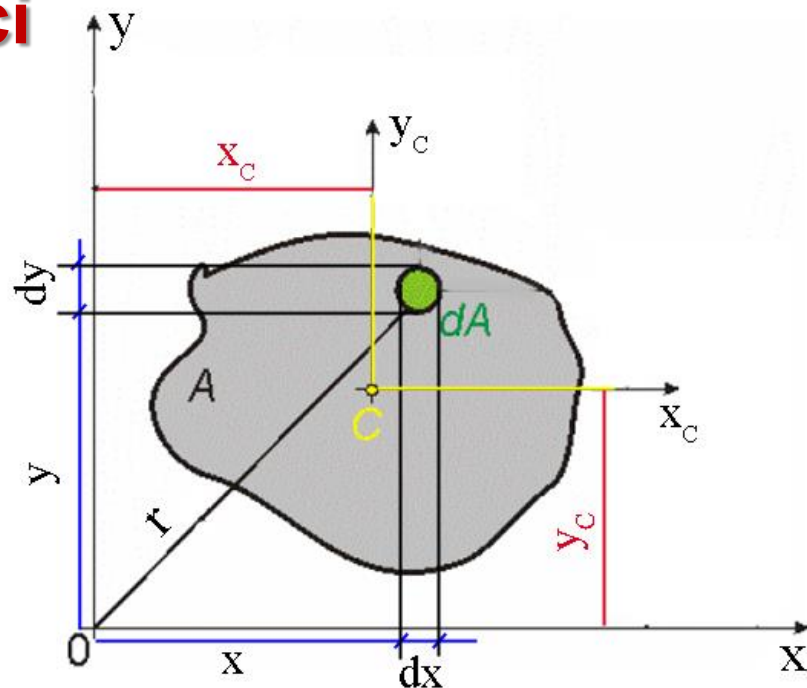


Rys. 3.

Osiowy moment bezwładności

Wykorzystując związek pomiędzy współrzędnymi x, y a odległością biegunową r :

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Rys. 4.

Biegunowy moment bezwładności możemy określić jako sumę osiowych momentów bezwładności:

$$J_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = J_x + J_y$$

Osiowy moment bezwładności

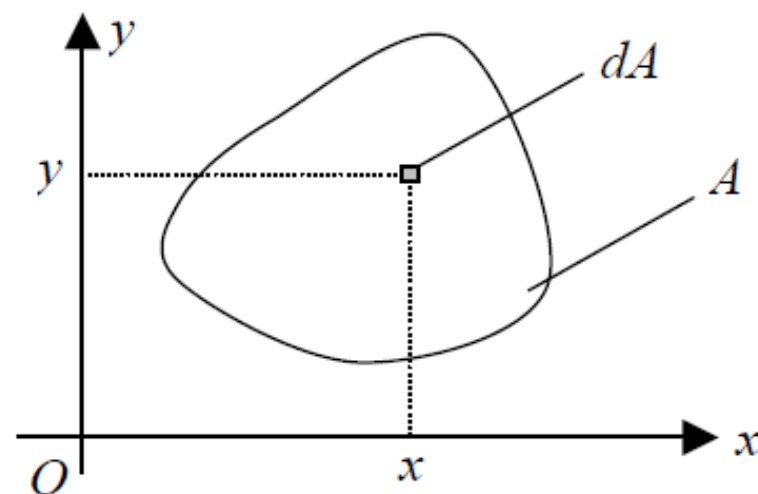
Osiowym momentem bezwładności figury płaskiej względem dowolnej osi leżącej w płaszczyźnie figury nazywamy granicę algebraicznej sumy, dla całej powierzchni A figury płaskiej, iloczynów elementarnych pól dA przez kwadrat ich odległości od danej osi, gdy elementarne pola dążą do zera (Fig. 5).

Momentem bezwładności figury względem osi x jest

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

Momentem bezwładności figury względem osi y jest

$$J_y = \int_A x^2 dA$$



Rys. 5.

Osiowy moment bezwładności

Promieniem bezwładności nazywa się wielkości zdefiniowane następująco:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

Momenty bezwładności są wielkościami addytywnymi, tzn, np.:

$$J_x = J_1 + J_2 + \dots$$

Charakterystyka momentu bezwładności

Osiowe i biegunowy moment, są zawsze dodatnie i można je traktować jako swego rodzaju miarę rozproszenia:

- przekroju wokół danej osi tj. im bardziej pole figury płaskiej jest skupione wokół osi, tym moment bezwładności względem niej jest mniejszy,
- pola figury płaskiej wokół początku układu współrzędnych.

Charakterystyka momentu bezwładności

Ważne

Moment bezwładności względem osi jest równy sumie momentów bezwładności (J_x, J_y) względem dwóch płaszczyzn wzajemnie prostopadłych, przecinających się wzdłuż tej osi.

Biegunowy moment bezwładności J_0 jest równy sumie momentów bezwładności względem dwu wzajemnie prostopadłych osi, przecinających się w punkcie O (dla układu płaskiego).

Miarą geometrycznego momentu bezwładności jest $[m^4]$.

Miarą masowego momentu bezwładności jest $[kg \cdot m^2]$.

Moment dewiacji (zboczenia)

Momentem dewiacji (zboczenia) figury płaskiej o powierzchni A nazywamy granicę algebraicznej sumy iloczynów elementarnych powierzchni $dA \rightarrow 0$ przez ich współrzędne x i y . Sumowanie to odbywa się po całej powierzchni A figury płaskiej.

Momentem dewiacyjnym figury względem prostokątnego układu osi x i y jest

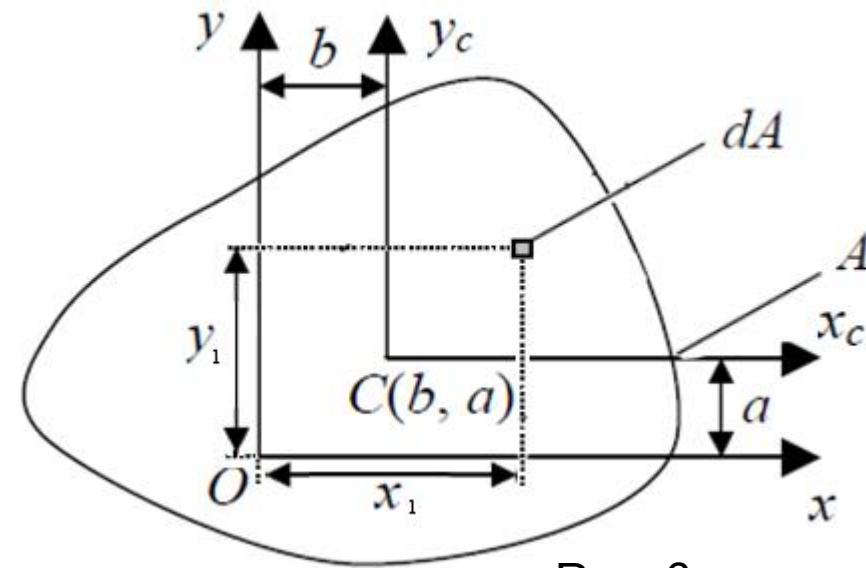
$$J_{xy} = \int_A xy dA$$

Moment dewiacji J_{xy} danej figury płaskiej równa się zero, jeśli choć jedna z osi, względem których został wyznaczony, jest osią symetrii rozpatrywanej figury. J_{xy} może przyjmować wartości dodatnie, ujemne lub zero.

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych

Osie centralne figury płaskiej to osie względem których jej momenty statyczne są równe zero.

W przypadku obliczenia momentu bezwładności i dewiacji względem osi centralnych (x_c, y_c) otrzymujemy (Rys. 6):



Rys. 6.

$$S_x = 0$$



$$J_x = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA = J_{x_c} + Aa^2$$

$$J_y = \int_A x_1^2 dA = \int_A (x + b)^2 dA = J_{y_c} + Ab^2$$

$$J_{xy} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = J_{x_c y_c} + Aab$$

$$x_1 = x + b$$

$$y_1 = y + a$$

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych

Otrzymane zależności noszą nazwę **twierdzenia Steinera**.

Osiowy moment bezwładności figury płaskiej względem osi równoległej odległej od środka ciężkości o określoną wartość jest równy momentowi względem osi równoległej przechodzącej przez środek ciężkości figury, powiększonemu o iloczyn powierzchni figury i kwadratu odległości między osiami.

$$J_x = J_{x_C} + Aa^2$$

$$J_y = J_{y_C} + Ab^2$$

Moment dewiacyjny figury płaskiej względem osi równoległe przesuniętych jest równy momentowi dewiacyjnemu względem osi centralnych, powiększonemu o iloczyn powierzchni i obu składowych równoległego przesunięcia.

$$J_{xy} = J_{x_C y_C} + Aab$$

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych

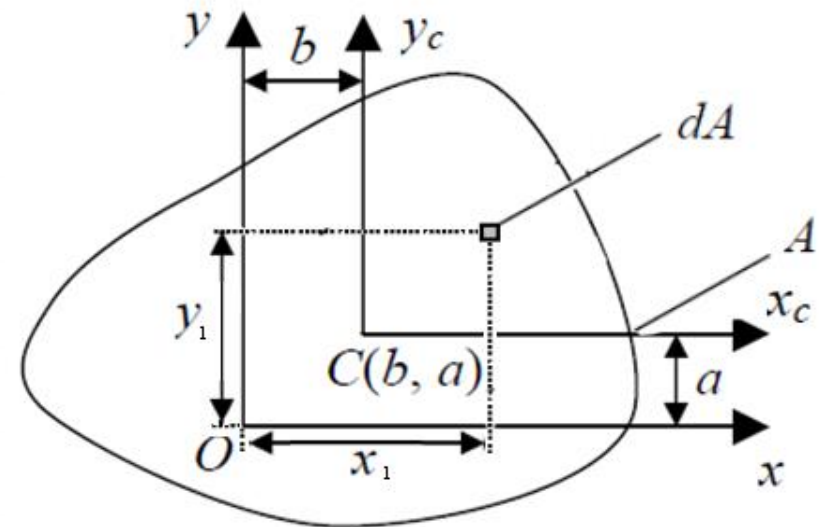
J_{x_C} , J_{y_C} , $J_{x_C y_C}$ to momenty bezwładności i dewiacji względem osi centralnych zgodnie z równoległym przesunięciem osi (x, y) , a i b współrzędne środka ciężkości figury w układzie (x, y) .

Na tej podstawie osiowe momenty bezwładności oraz dewiacyjny moment figury względem osi centralnych przyjmie postać (Rys. 7):

$$J_{x_C} = J_x - Aa^2$$

$$J_{y_C} = J_y - Ab^2$$

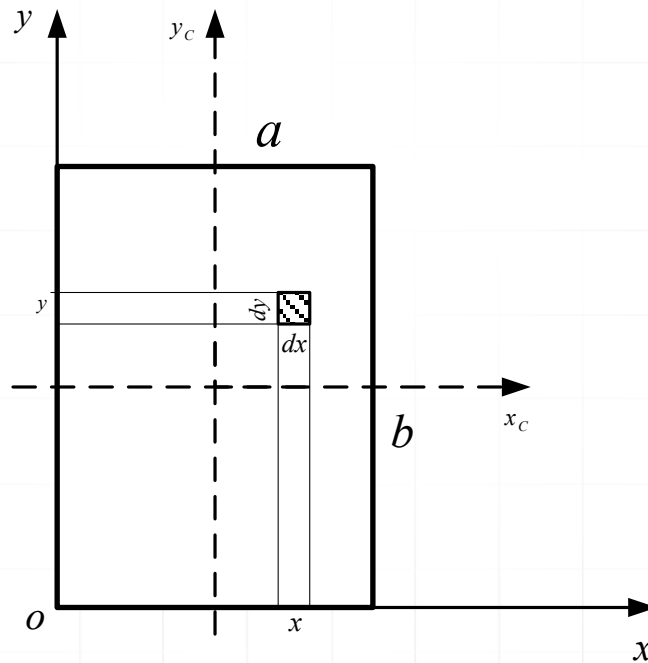
$$J_{x_C y_C} = J_{xy} - Aab$$



Rys. 7.

Przykład

Znaleźć momenty bezwładności i dewiacji prostokąta o bokach a i b względem osi przylegających do jego boków i osi centralnych (Rys. 8).



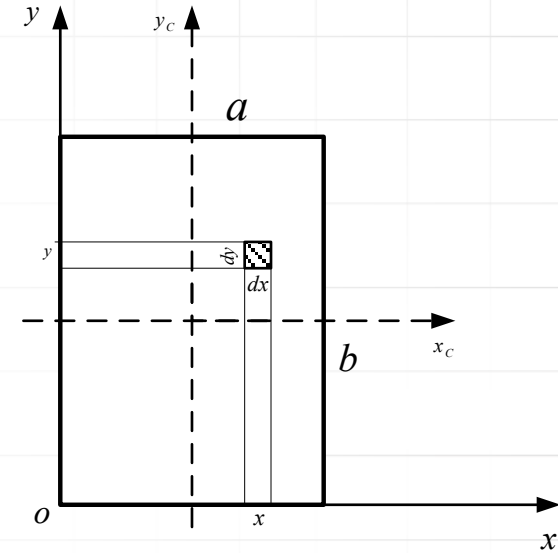
Rys. 8.

Rozwiązanie

Przyjmując układ współrzędnych pokrywających się z bokami a i b prostokąta i dzieląc pole prostokąta na elementy powierzchni $dx dy$ otrzymujemy:

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$



$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^a dx \cdot \int_0^b y^2 dy = x \left|_0^a \cdot \frac{1}{3} y^3 \right|_0^b = a \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} ab^3$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 dx \cdot \int_0^b dy = \frac{1}{3} x^3 \left|_0^a \cdot y \right|_0^b = \frac{1}{3} a^3 \cdot \frac{1}{3} b = \frac{1}{3} a^3 b$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^a x dx \cdot \int_0^b y dy = \frac{1}{2} x^2 \left|_0^a \cdot \frac{1}{2} y^2 \right|_0^b = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

$$J_0 = J_x + J_y = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{1}{3} ab^3 + \frac{1}{3} a^3 b = \frac{1}{3} ab(a^2 + b^2)$$

Rozwiązanie

Prostokąt ma dwie osie symetrii, które są centralnymi osiami.
Należy zastosować twierdzenie Steinera:

$$J_{x_c} = J_x - Aa^2$$

$$J_{x_c y_c} = J_{xy} - Aab$$

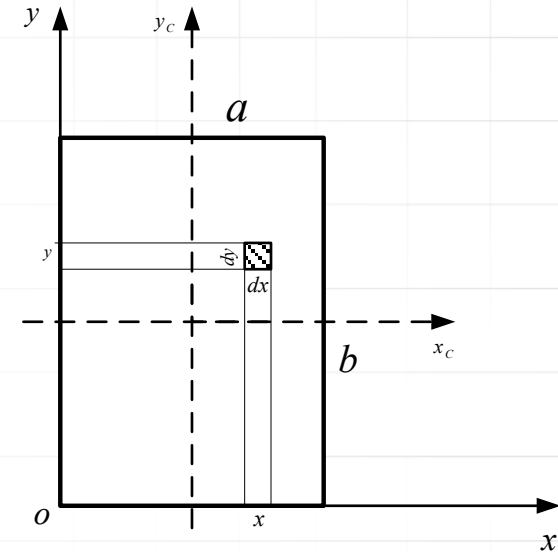
$$A = ab \quad x_c = x - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b \quad y_c = y - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$$

$$J_{x_c} = J_x - A\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}ab^3 = \frac{1}{12}ab^3$$

$$J_{y_c} = J_y - A\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{3}a^3b - \frac{1}{4}a^3b = \frac{1}{12}a^3b$$

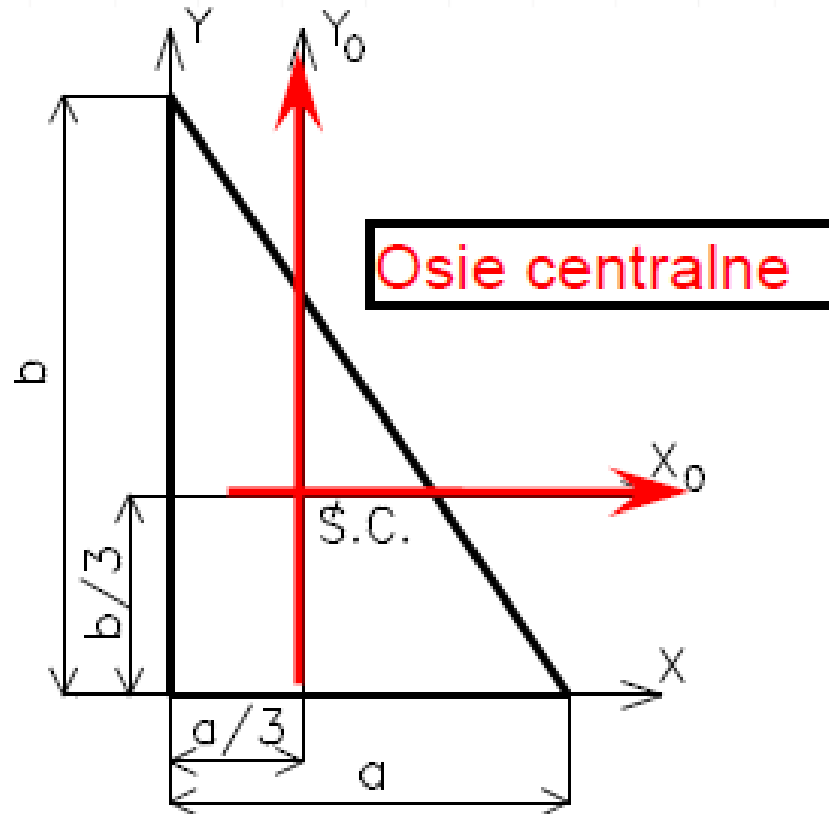
Zgodnie z definicją moment dewiacji $J_{x_c y_c} = 0$

$$J_{x_c y_c} = J_{xy} - A\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{a^2 b^2}{4} - ab \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = 0$$



Zapamiętaj !!!

Osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju
– **OSIE CENTRALNE.**



Zapamiętaj !!!

Jeżeli jedna z osi układu współrzędnych jest osią symetrii figury płaskiej, to **moment dewiacyjny figury** w takim układzie współrzędnych jest równy **zero**.

Wyznaczanie **momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego figury złożonej** stosować metodę superpozycji, traktując rozpatrywaną figurę jako sumę figur elementarnych, takich jak np. prostokąt, trójkąt i fragment koła.

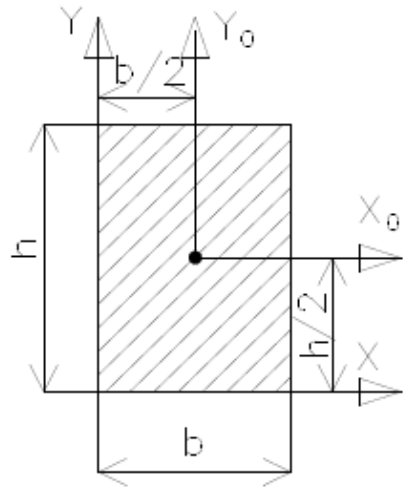
Korzystać będziemy z wartości momentów bezwładności i momentu dewiacyjnego dla wymienionych figur.

Charakterystyki geometryczne dla prostych figur

Figura geometryczna

osiowe momenty bezwładności

moment dewiacji



$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

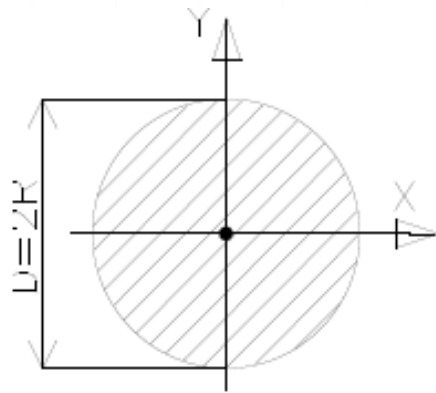
$$J_{y_0} = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{x_0y_0} = 0$$

$$J_x = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{3}$$

$$J_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$



$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$J_y = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}$$

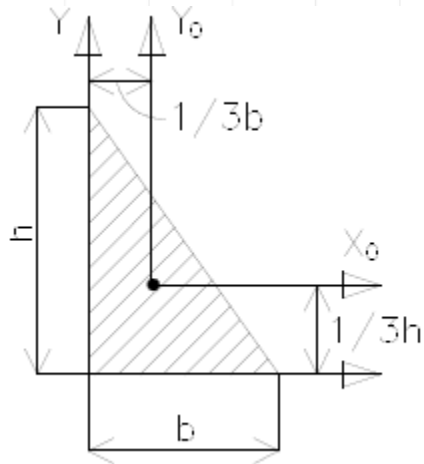
$$J_{xy} = 0$$

Charakterystyki geometryczne dla prostych figur

Figura geometryczna

osiowe momenty bezwładności

moment dewiacji



$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{36}$$

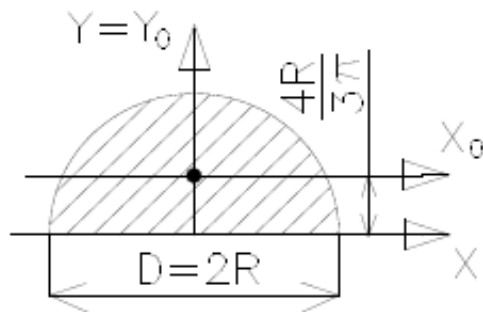
$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_{y_0} = \frac{hb^3}{36}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{x_0y_0} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

$$J_{xy} = \frac{b^2h^2}{24}$$



$$J_{x_0} = \frac{D^4}{16} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) =$$

$$\approx 0,00686D^4 =$$

$$\approx 0,1098R^4$$

$$J_x = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$J_y = \frac{\pi D^4}{128} = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$J_{xy} = 0$$

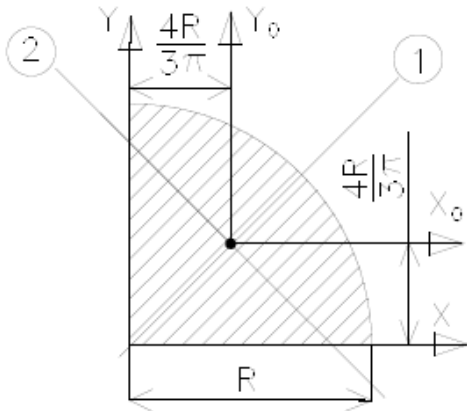
$$J_{x_0y_0} = 0$$

Charakterystyki geometryczne dla prostych figur

Figura geometryczna

osiowe momenty bezwładności

moment dewiacji



$$J_{x_0} = R^4 \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) =$$

$$\approx 0,0549R^4$$

$$J_x = \frac{\pi D^4}{256} = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$J_x = \frac{\pi R^4}{16}$$

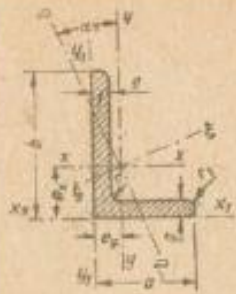
$$J_{xy} = \frac{R^4}{8}$$

$$J_{x_0 y_0} = \frac{R^4}{8} -$$

$$\frac{4R^4}{9\pi} =$$

$$= -0,0165R^4$$

Charakterystyki geometryczne dla prostych figur



Tablica

17

KĄTOWNIKI NIERÓWNOBARAMIENNE

wg PN-81/H-93402

Długości fabrykacyjne: przy szerokości ramion 45×30 mm 3 ± 12 m
przy szerokości ramion powyżej 45×30 mm 3 ± 15 m

Wyróżnik oznaczenia L	Wymiary							Nachy- lenie osi $\eta - \eta$	Pole prze- kroju F
	b	a	g	r	r ₁	r _x	r _y		
	mm				cm		tg α		
45 × 30 × ⁴ / ₅	45	30	4 5	4,0	2,0	1,48 1,52	0,74 0,78	0,434 0,429	2,86 3,52
60 × 40 × ⁵ / ₆	60	40	5 6	6,0	3,0	1,96 2,00	0,97 1,01	0,437 0,431	4,79 5,68
70 × 50 × 7	70	50	7	7,0	3,5	2,27	1,29	0,493	7,96
6			6			2,44	1,21	0,435	7,19
75 × 50 × 7	70	50	7	7,0	3,5	2,48	1,25	0,433	8,31
8			8			2,52	1,29	0,430	9,41
80 × 40 × 6	80	40	6	7,0	3,5	2,85	0,88	0,460	6,89
80 × 65 × 10	80	65	10	8,0	4,0	2,55	1,81	0,638	13,6
90 × 60 × 8	90	60	8	8,0	4,0	2,96	1,48	0,434	11,4
100 × 50 × 8	100	50	8	9,0	4,5	3,59	1,12	0,258	11,4

Masa m kg/m	Moment bezwładności					Promień bezwładności		
	J _x	J _y	J _{xy}	J _{x1}	J _{y1}	i _x	i _y	i _{xy}
	cm ⁴					cm		
2,24	5,77	2,05	1,19	12,04	3,62	1,37	0,85	0,65
2,76	6,98	2,47	1,45	15,13	4,60	1,41	0,84	0,64
3,76	17,2	6,11	3,50	35,5	10,63	1,89	1,13	0,86
4,46	20,1	7,12	4,15	42,8	12,93	1,88	1,12	0,86
6,25	38,2	16,16	9,06	79,3	29,3	2,19	1,42	1,07
5,65	40,5	14,44	8,36	83,3	24,9	2,37	1,42	1,08
6,53	46,4	16,46	9,57	97,6	29,4	2,36	1,41	1,07
7,39	52,0	18,38	10,75	111,9	33,9	2,35	1,40	1,07
5,41	44,9	7,59	4,92	100,9	13,0	2,56	1,05	0,85
10,7	82,2	48,3	24,8	170,5	92,6	2,46	1,89	1,35
8,97	92,3	32,8	19,0	192,7	57,9	2,84	1,70	1,29
8,99	116,0	19,5	12,7	263,3	34,0	3,18	1,31	1,05