

# Mechanika I

## Kurs: Transport

**Katedra Mechaniki, Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej**

### **Główne centralne osie i momenty bezwładności w układzie płaskim**

Krzysztof Jamroziak

e-mail: [krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl](mailto:krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl)

Tel. 71 320 27 60

Konsultacje: wtorek: godz. 13.00-15.00

środa: godz. 13.00-15.00



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Wrocław University  
of Science and Technology

# Momenty bezwładności i dewiacji względem osi głównych

Przyjmijmy prostokątny układ współrzędnych  $O\xi\eta$  obrócony o kąt  $\varphi$  względem układu  $Oxy$  (Rys. 1).

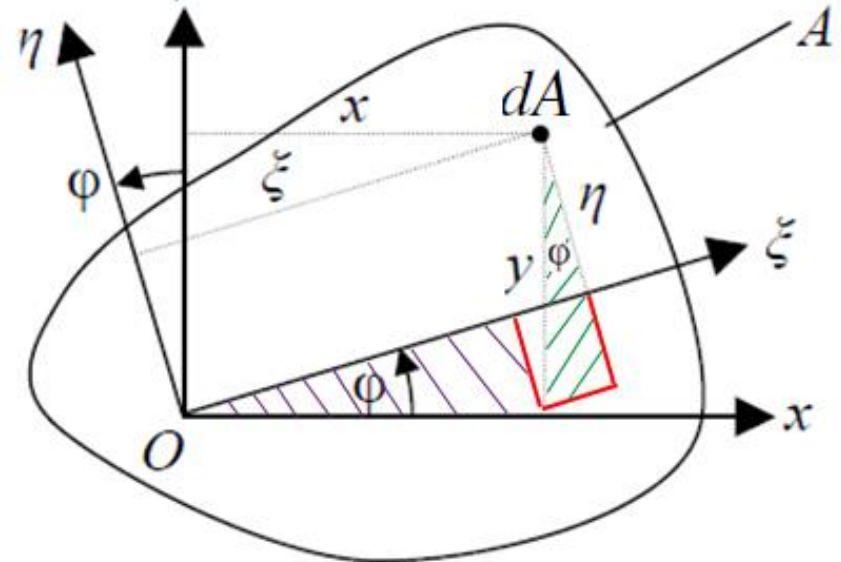
Współrzędne dowolnego punktu figury płaskiej spełniają zależności:

$$J_x = \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A x^2 dA, \quad J_{xy} = \int_A xy dA,$$

$$J_\xi = \int_A \eta^2 dA, \quad J_\eta = \int_A \xi^2 dA, \quad J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA,$$

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi$$

$$\eta = y \cos \varphi - x \sin \varphi$$



Rys. 1.

# Momenty bezwładności i dewiacji względem osi głównych

Momenty bezwładności i moment dewiacyjny w obróconym układzie  $O\xi\eta$ :

$$J_{\xi} = \int_A \eta^2 dA = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - 2J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$J_{\eta} = \int_A \xi^2 dA = J_y \cos^2 \varphi + J_x \sin^2 \varphi + 2J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA = (J_x - J_y) \sin \varphi \cos \varphi + J_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

# Momenty bezwładności i dewiacji względem osi głównych

Stosując zależności:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{(1 + \cos 2\varphi)}{2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{(1 - \cos 2\varphi)}{2}$$

Ostatecznie otrzymamy:

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$$

$$J_{\eta} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi + J_{xy} \sin 2\varphi$$

$$J_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi$$

**Osie układu prostokątnego, w którym moment dewiacyjny  $J_{\xi\eta} = 0$  nazywamy głównymi osiami bezwładności.**

**Moment bezwładności  $J_{\xi}$ ,  $J_{\eta}$  obliczony względem tych osi to główne momenty bezwładności.**

# Momenty bezwładności i dewiacji względem osi głównych

Dla układu osi obróconych o kąt  $\varphi$  względem osi głównych  $x_g, y_g$  można też zapisać w następującej formie:

$$J_{\xi} = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi$$

$$J_{\eta} = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\varphi$$

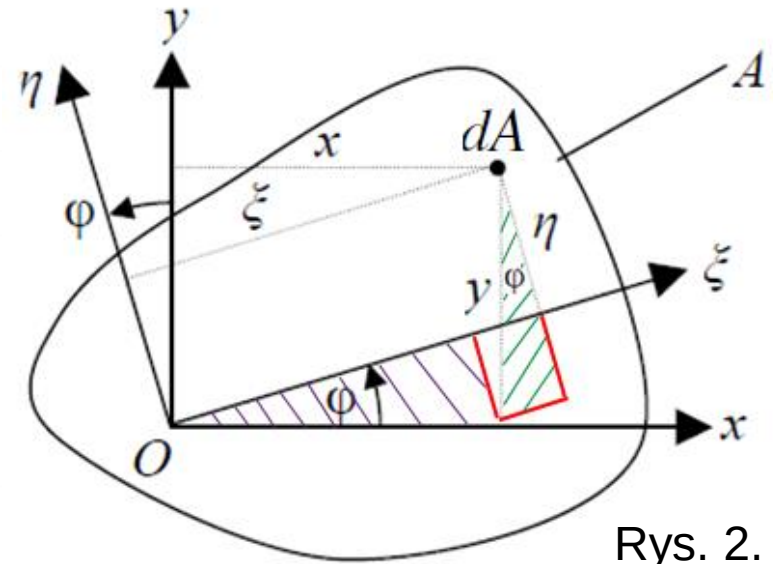
$$J_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi$$

Wzory powyższe wyrażają szukane zależności między momentami bezwładności i dewiacji dla dwóch układów osi współrzędnych o wspólnym początku układu współrzędnych

# Momenty bezwładności i dewiacji względem osi głównych

Dodając stronami zauważa się, że:

$$J_{\xi} + J_{\eta} = J_x + J_y = J_O = \text{const.}$$



**Wniosek !**

Przy obrocie układu odniesienia powyższe zależności są słuszne.

Momenty bezwładności względem głównych osi bezwładności osiągają wartości ekstremalne.

Pytanie: o jaki kąt  $\varphi$  należy obrócić układ osi  $(X, Y)$  aby momenty bezwładności w nowym układzie osiągnęły wartości ekstremalne.

# Momenty bezwładności względem osi głównych

Należy znaleźć ekstremum funkcji jednej zmiennej.

Warunki na zerowanie się pochodnych momentów bezwładności  $J_\xi$  i  $J_\eta$  względem kąta  $\varphi$ :

$$\frac{dJ_\xi}{d\varphi} = -2 \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi - 2J_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\frac{dJ_\eta}{d\varphi} = 2 \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + 2J_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

Otrzymujemy jedno równanie:

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

# Momenty bezwładności względem osi głównych

Z powyższego równania, którego lewa strona to moment dewiacji  $J_{\xi\eta}$  względem nowych osi otrzymujemy

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} + n \frac{\pi}{2}$$

Wniosek:

**Główne osie bezwładności figury płaskiej w dowolnym punkcie to dwie prostopadłe osie, względem których jej moment dewiacji jest równy zero a momenty bezwładności są ekstremalne (główne momenty bezwładności).**



# Moment dewiacji względem osi głównych

Dla jakich wartości  $J_{\xi\eta}$  względem nowych osi zanika?

$$J_{\xi\eta} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\varphi + J_{xy} \cos 2\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y}$$

**Zapamiętaj!!!**

Kierunki główne są to takie kierunki osi, dla których moment dewiacji znika.

Jeżeli początek takiego układu osi współrzędnych pokrywa się ze środkiem masy figury, **to osie te nazywamy głównymi centralnymi osiami bezwładności**, a momenty bezwładności wyznaczone względem tych osi – **głównymi centralnymi momentami bezwładności**

# Momenty bezwładności względem osi głównych

$$\text{oś } \xi \Rightarrow \text{oś } 1, \quad \text{oś } \eta \Rightarrow \text{oś } 2, \quad J_{\xi\eta} = J_{1,2} \equiv 0$$

Wartości głównych momentów bezwładności:

$$1) \quad \sin 2\varphi = \frac{\text{tg} 2\varphi}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 2\varphi}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 2\varphi}}$$

$$2) \text{ podstawić powyższe zależności za } \text{tg } 2\varphi \rightarrow \text{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$$

# Momenty bezwładności względem osi głównych

$$\begin{aligned} J_{1,2} &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} \pm J_{xy} \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi}} = \\ &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{J_x - J_y}{2} \cdot \frac{\sqrt{(J_y - J_x)^2}}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}} \pm J_{xy} \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} \cdot \frac{\sqrt{(J_y - J_x)^2}}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}} = \\ &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \left[ \frac{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}{\sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{xy}^2}} \right] = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2} \end{aligned}$$

# Momenty bezwładności względem osi głównych

Wartości głównych momentów bezwładności względem osi głównych

$$J_{\max} = J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

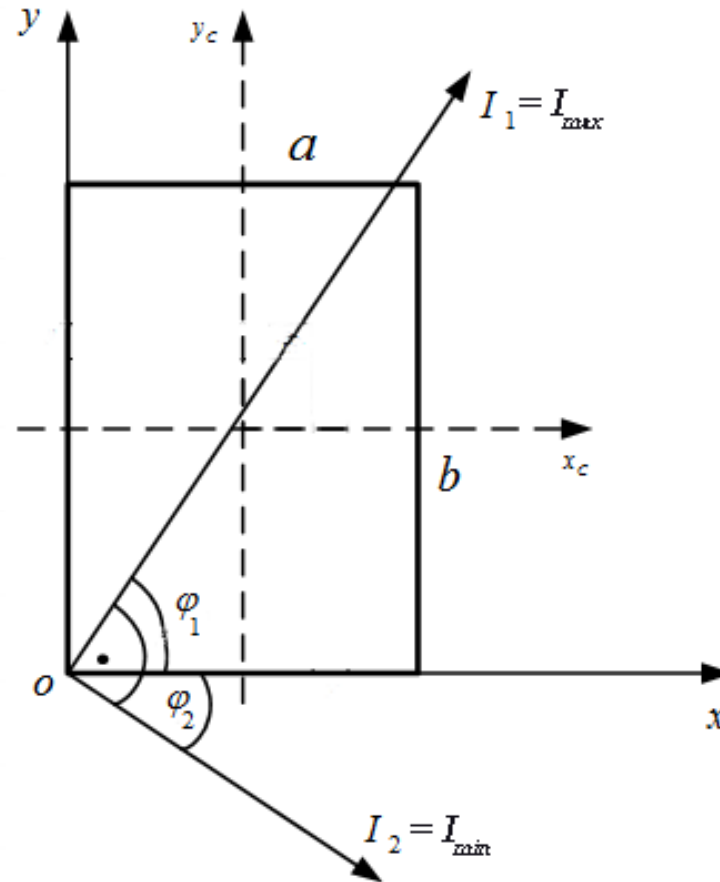
$$J_{\min} = J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$\text{oraz} \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}} \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\min}}$$

Podane kąty określają położenie osi  $J_{\max}$ ,  $J_{\min}$

# Momenty bezwładności względem osi głównych

Kierunki główne minimalnego i maksymalnego momentów bezwładności dla kąta  $\varphi$  (Rys. 3).

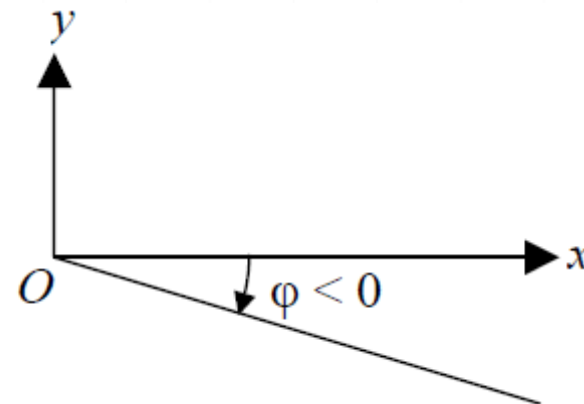
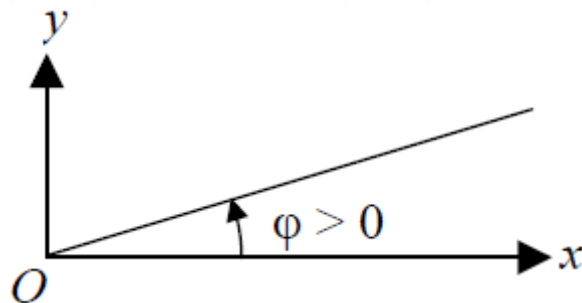


Rys. 3.

# Momenty bezwładności względem osi głównych

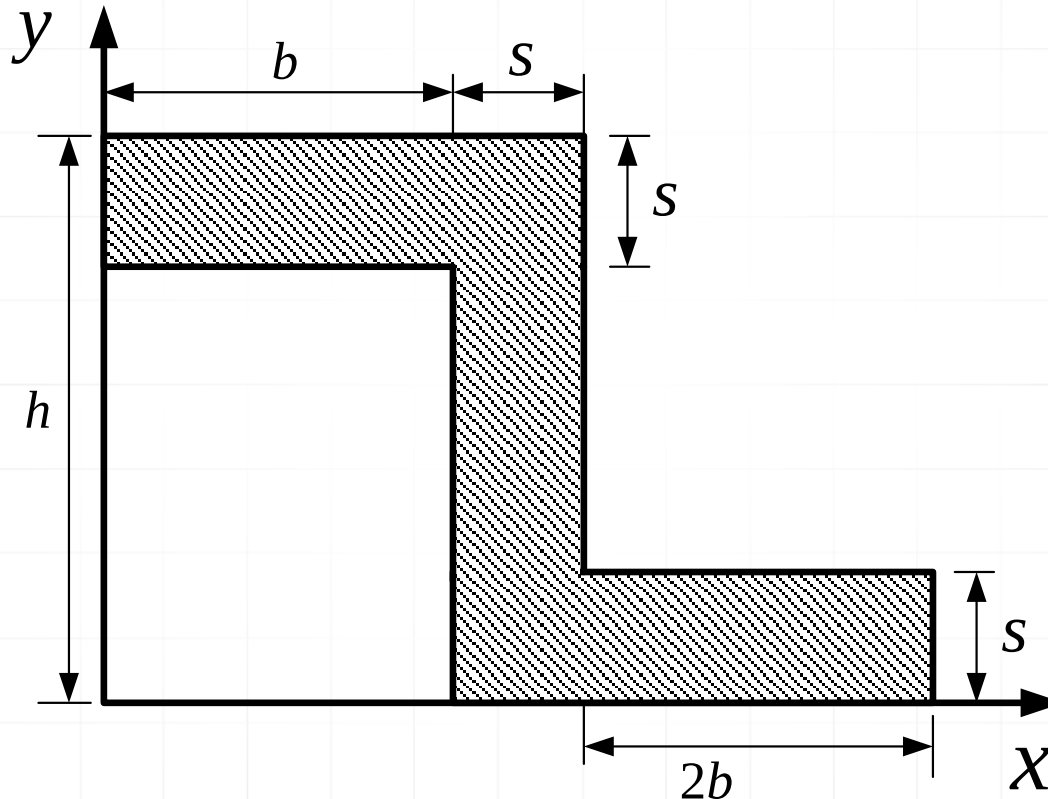
- 1)  $J_x > J_y$  to  $\varphi_1 = \varphi_0$  natomiast  $\varphi_2 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$
- 2)  $J_x < J_y$  to  $\varphi_1 = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  natomiast  $\varphi_2 = \varphi_0$
- 3)  $J_x = J_y$   $J_{xy} > 0$  to  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$  natomiast  $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$
- 4)  $J_x = J_y$   $J_{xy} < 0$  to  $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$  natomiast  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$

Znak dodatni lub ujemny kąta  $\varphi$  przyjmujemy:



# Przykład

Wyznaczyć główne centralne momenty bezwładności figur płaskich o wymiarach jak pokazano na rysunku 4. Dane:  $b$ ,  $s$ ,  $h$



Rys. 4.

# Rozwiązanie

## Momenty główne centralne

$$J_{1,2} = \frac{J_{x_s} + J_{y_s}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_s} - J_{y_s})^2 + 4J_{x_s y_s}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{-2J_{x_s y_s}}{J_{x_s} - J_{y_s}}$$

## Położenie środka ciężkości

$$y_s = \frac{A_1 \cdot y_{s1} + A_2 \cdot y_{s2} + A_3 \cdot y_{s3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_s = \frac{S_x}{A} \quad x_s = \frac{S_y}{A}$$

$$x_s = \frac{A_1 \cdot x_{s1} + A_2 \cdot x_{s2} + A_3 \cdot x_{s3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$



# Rozwiązanie

Gdzie mamy:

$$y_{s_1} = h - \frac{s}{2}, \quad y_{s_2} = 0,5h, \quad y_{s_3} = 0,5s$$

$$x_{s_1} = 0,5b, \quad x_{s_2} = b + \frac{s}{2}, \quad x_{s_3} = 2b + s$$

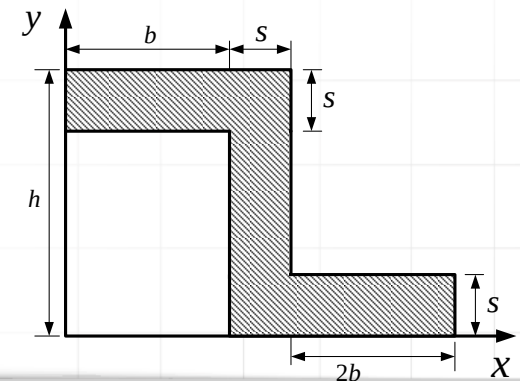
Poszczególne momenty bezwładności i dewiacji obliczamy ze wzorów:

$$J_{x_S} = J_x - Ay_S^2, \quad J_{y_S} = J_y - Ax_S^2,$$

$$J_{x_S y_S} = J_{xy} - Ax_S y_S$$

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} + J_x^{(3)}, \quad J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} + J_y^{(3)},$$

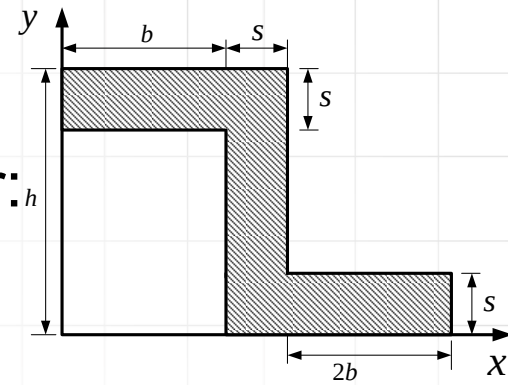
$$J_{xy} = J_{xy}^{(1)} + J_{xy}^{(2)} + J_{xy}^{(3)}.$$



# Rozwiązanie

Momenty bezwładności dla poszczególnych figur:

$$J_x^{(1)} = \frac{bs^3}{12} + A_1 \cdot \left(h - \frac{s}{2}\right)^2, \quad J_x^{(2)} = \frac{sh^3}{3}, \quad J_x^{(3)} = \frac{2bs^3}{3}$$



$$J_y^{(1)} = \frac{sb^3}{3}, \quad J_y^{(2)} = \frac{hs^3}{12} + A_2 \left(b + \frac{s}{2}\right)^2, \quad J_y^{(3)} = \frac{s(2b)^3}{12} + A_3 (2b + s)^2$$

$$J_{xy} = J_{xy}^{(1)} + J_{xy}^{(2)} + J_{xy}^{(3)}$$

$$J_{xy}^{(1)} = \frac{b^2 s^2}{4} + A_1 \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(h - \frac{s}{2}\right), \quad J_{xy}^{(2)} = \frac{s^2 h^2}{4} + A_2 \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \left(b + \frac{s}{2}\right), \quad J_{xy}^{(3)} = \frac{2b^2 s^2}{4} + A_3 \left(\frac{s}{2}\right) \cdot (2b + s)$$

# Rozwiązanie

Główne momenty bezwładności:

$$J_{\max} = J_1 = \frac{J_{x_s} + J_{y_s}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{x_s} - J_{y_s}}{2}\right)^2 + J_{x_s y_s}^2}$$

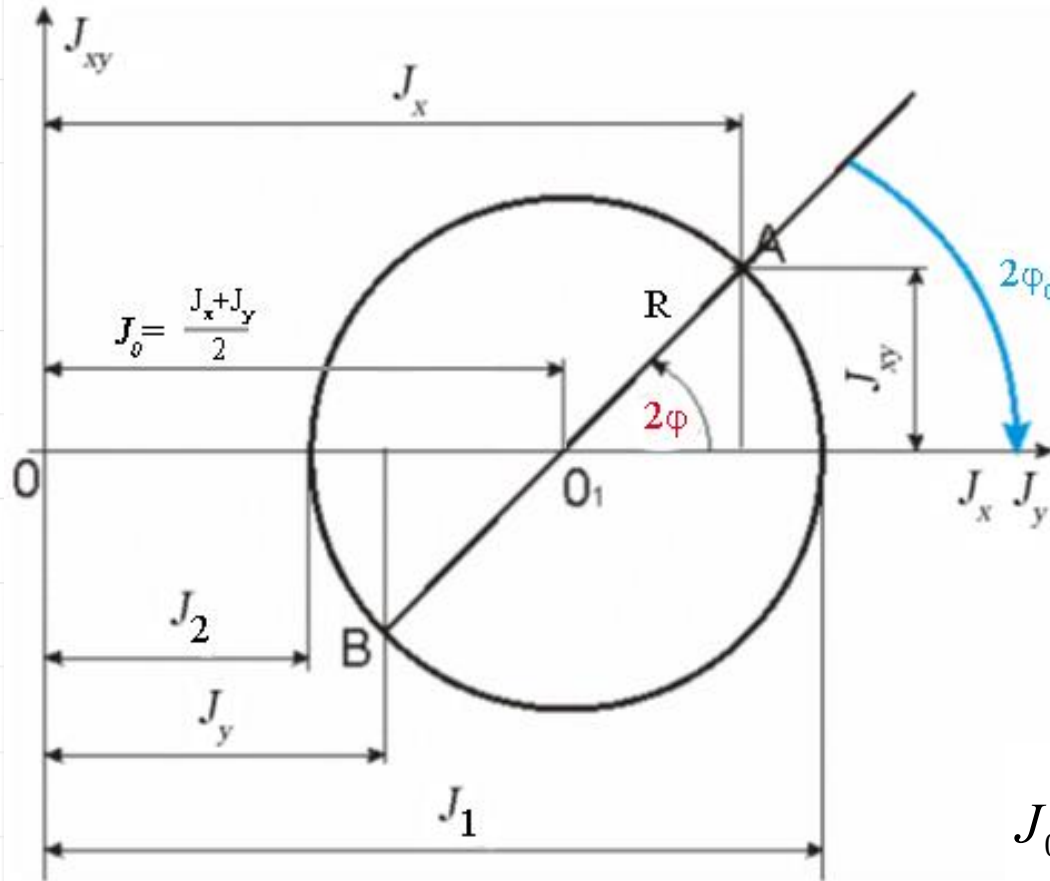
$$J_{\min} = J_2 = \frac{J_{x_s} + J_{y_s}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{x_s} - J_{y_s}}{2}\right)^2 + J_{x_s y_s}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{-2J_{x_s y_s}}{J_{x_s} - J_{y_s}} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2J_{x_s y_s}}{J_{y_s} - J_{x_s}}$$

# Momenty bezwładności względem osi głównych

Metoda graficzna

Można przedstawić za pomocą **tzw. koła Mohra** (Rys. 5).



Rys. 5.

Koło Mohra pozwala na odczytanie wartości momentów  $J_x$ ,  $J_y$ , i  $J_{xy}$  dla układu obróconego o dowolny kąt  $\varphi$  względem układu głównego, albo wartości ekstremalne momentów.

$$J_0 = \frac{J_x + J_y}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

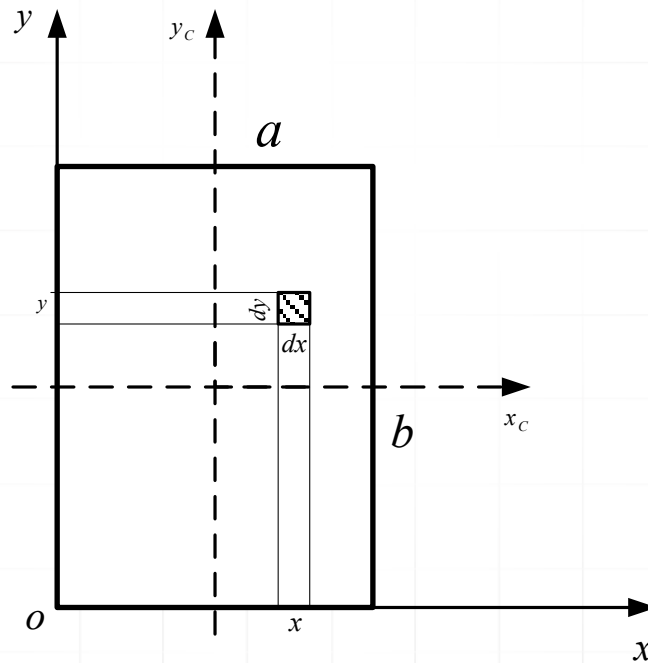
$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$$

# Przykład

Znaleźć momenty bezwładności i dewiacji prostokąta o bokach  $a$  i  $b$  względem osi przylegających do jego boków (Rys. 6).

Znaleźć główne centralne momenty bezwładności.

Znaleźć momenty główne i osie główne dla układu o początku w punkcie  $O$ .



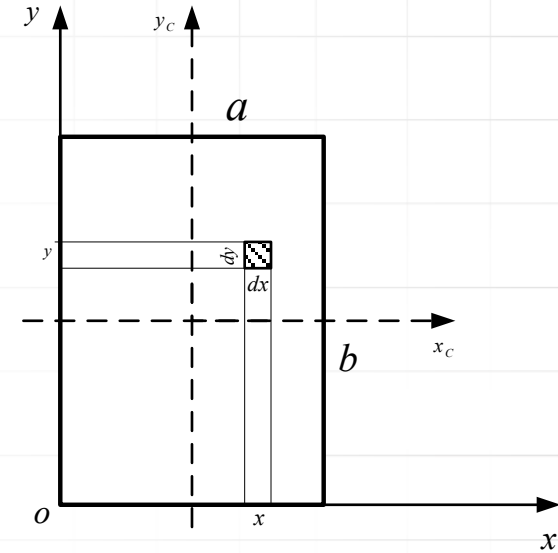
Rys. 6.

# Rozwiązanie

Przyjmując układ współrzędnych pokrywających się z bokami  $a$  i  $b$  prostokąta i dzieląc pole prostokąta na elementy powierzchni  $dx dy$  otrzymujemy:

$$J_x = \int_A y^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA$$



$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^a dx \cdot \int_0^b y^2 dy = x \left|_0^a \cdot \frac{1}{3} y^3 \right|_0^b = a \cdot \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} ab^3$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \int_0^a x^2 dx \cdot \int_0^b dy = \frac{1}{3} x^3 \left|_0^a \cdot y \right|_0^b = \frac{1}{3} a^3 \cdot \frac{1}{3} b = \frac{1}{3} a^3 b$$

$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^a x dx \cdot \int_0^b y dy = \frac{1}{2} x^2 \left|_0^a \cdot \frac{1}{2} y^2 \right|_0^b = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} = \frac{1}{4} a^2 b^2$$

$$J_0 = J_x + J_y = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{1}{3} ab^3 + \frac{1}{3} a^3 b = \frac{1}{3} ab(a^2 + b^2)$$

# Rozwiązanie

Prostokąt ma dwie osie symetrii, które są centralnymi głównymi centralnymi osiami. Należy zastosować twierdzenie Steinera:

$$J_{x_c} = J_x - Aa^2$$

$$J_{x_c y_c} = J_{xy} - Aab$$

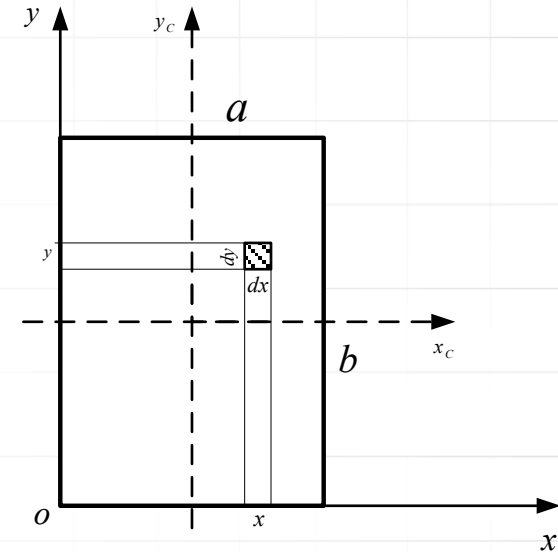
$$A = ab \quad x_c = x - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}b \quad y_c = y - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a$$

$$J_{x_c} = J_x - A\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}ab^3 = \frac{1}{12}ab^3$$

$$J_{y_c} = J_y - A\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \frac{1}{3}a^3b - \frac{1}{4}a^3b = \frac{1}{12}a^3b$$

Zgodnie z definicją moment dewiacji  $J_{x_c y_c} = 0$

$$J_{x_c y_c} = J_{xy} - A\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = \frac{a^2 b^2}{4} - ab \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{b}{2}\right) = 0$$



# Rozwiązanie

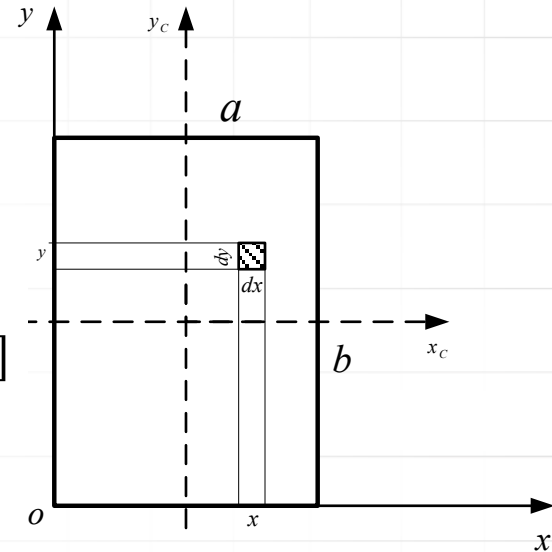
Moment główny i osie główne dla układu w punkcie O  
rozważanego prostokąta wynosi przyjmując dane  $a=2$  cm,  $b=3$  cm:

$$J_{\max} = J_1 = \frac{J_x + J_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$
$$J_{\min} = J_2 = \frac{J_x + J_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$J_x = \frac{ab^3}{3} = 18[\text{cm}^4] \quad J_y = \frac{a^3b}{3} = 8[\text{cm}^4] \quad J_{xy} = \frac{a^2b^2}{4} = 9[\text{cm}^4]$$

$$J_1 = \frac{18+8}{2} + \sqrt{\left(\frac{18-8}{2}\right)^2 + 9^2} = 13 + 10,3 = 23,3[\text{cm}^4]$$

$$J_2 = \frac{18+8}{2} - \sqrt{\left(\frac{18-8}{2}\right)^2 + 9^2} = 13 - 10,3 = 2,7[\text{cm}^4]$$





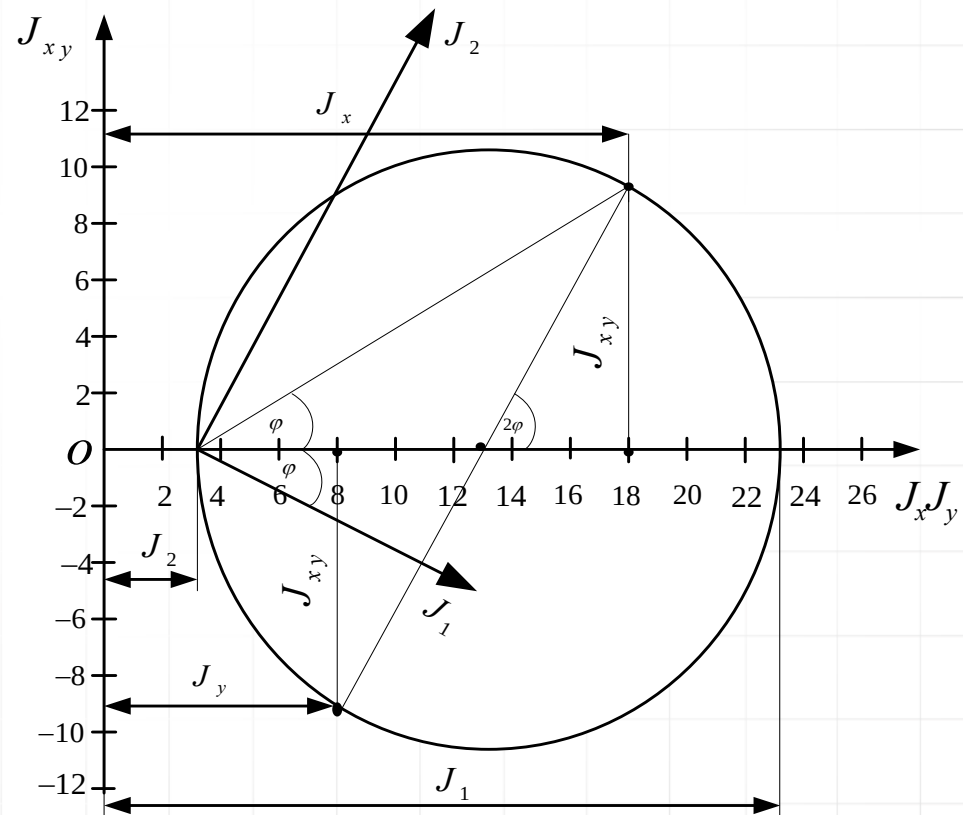
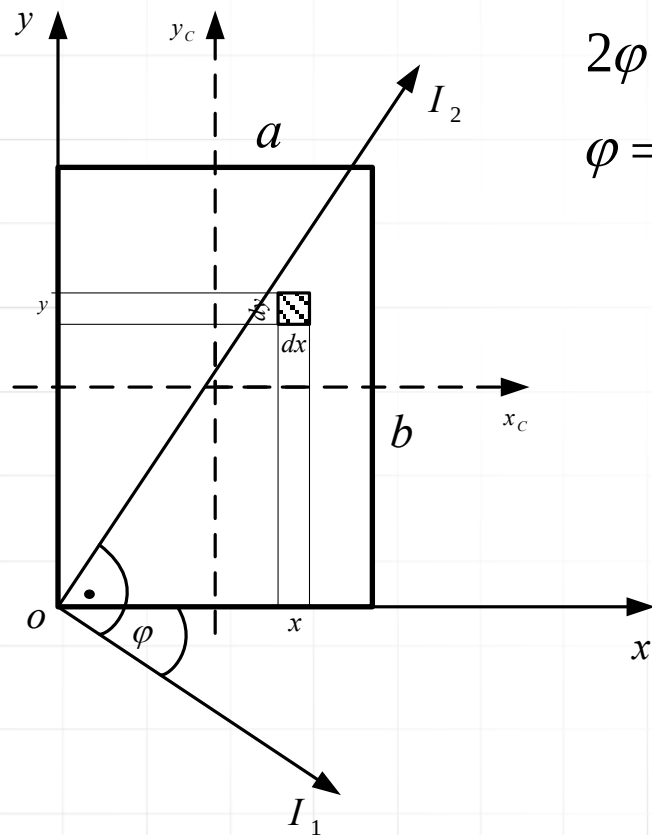
# Rozwiązanie

Moment główny i osie główne dla układu w punkcie O  
rozważanego prostokąta wynosi przyjmując dane  $a=2$  cm,  $b=3$  cm:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x} = \frac{2 \cdot 9}{8-18} = -1,8$$

$$2\varphi = -61^\circ$$
$$\varphi = -30^\circ 30'$$



# Zapamiętaj !!!

Osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju

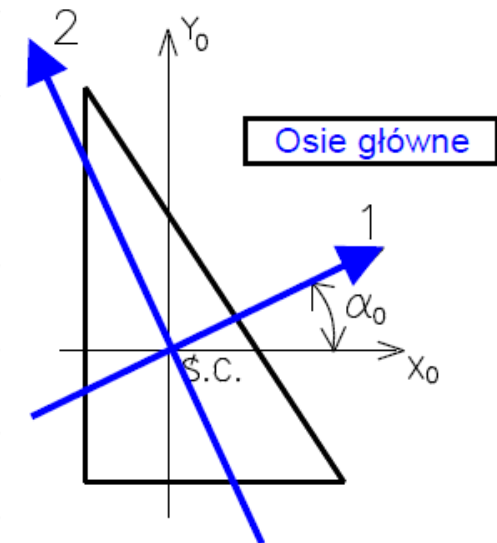
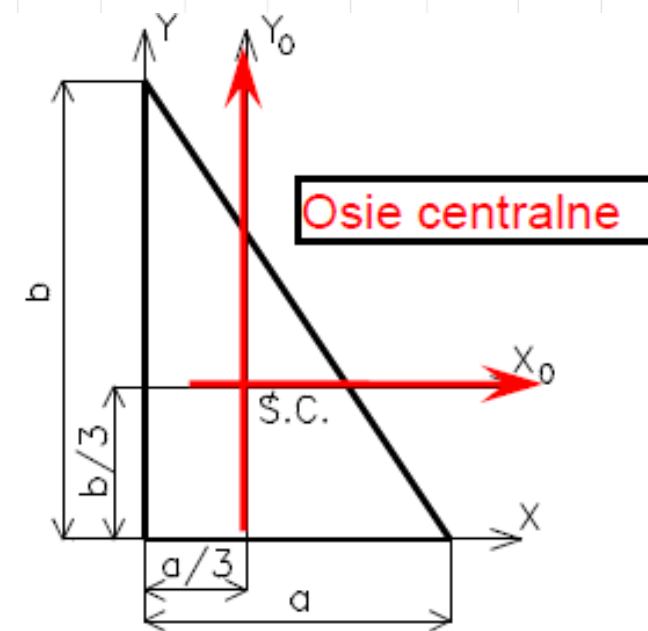
– **OSIE CENTRALNE.**

Osie obrócone pod odpowiednim kątem, powodującym wyzerowanie momentów dewiacyjnych

– **GŁÓWNE OSIE BEZWŁADNOŚCI.**

Momenty względem tych osi

– **GŁÓWNE MOMENTY BEZWŁADNOŚCI**



**Zapamiętaj !!!**

**Jeśli figura posiada oś symetrii, to jest ona jedna z jej głównych centralnych osi bezwładności.**

**Jeśli figura posiada dwie osie symetrii, to są one jej głównymi centralnymi osiami bezwładności.**

# Zapamiętaj !!!

O głównych **centralnych osiach bezwładności** mówimy wówczas, gdy układ osi głównych ma początek w środku **ciężkości rozpatrywanej figury płaskiej**.

Momenty bezwładności względem tych osi nazywamy **głównymi centralnymi momentami bezwładności**.

Momenty bezwładności wyznaczone względem tych osi nazywamy **głównymi centralnymi momentami bezwładności**.