Mechanika I
Kierunek: Transport

Kratownice, reakcje, siły wewnętrzne

Katedra Mechaniki, Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej

Krzysztof Jamroziak

e-mail: krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl
Tel. 71 320 27 60

Konsultacje: wtorek: godz. 13.00-15.00
środa: godz. 13.00-15.00

Wprowadzenie

Kratownice są jedną z najbardziej rozpowszechnionych form rozwiązywania zadań konstrukcyjnych.

W zależności od rodzaju przenoszonego obciążenia stosuje się kratownice płaskie lub przestrzenne.

Układ *n* prętów, których końce połączone są ze sobą przegubowo, mających niezmienną geometrycznie postać, nazywamy **kratownicą**.

Założenie przegubowego połączenia prętów jest wyidealizowane, gdyż oznacza, że końce prętów mogą się względem obracać.

W konstrukcjach inżynierskich połączenia prętów w kratownicach (węzły) są konstruowane w sposób odbiegający od tego założenia (wykonane za pomocą nitowania, spawania, skręcania itp.).

Wprowadzenie

Założenie to jednak upraszcza znacznie sposób obliczania kratownic, nie wprowadzając równocześnie większych błędów.

Dodatkowymi założeniami przyjmowanymi w teorii kratownic są:

- prostoliniowość,
- nieważkość prętów,
- wszystkie siły zewnętrzne obciążające kratownicę są przyłożone w węzłach.

Rys. 1. Przykład kratownicy zastosowanej w budowie mostu

Kratownice

Kratownicą nazywamy układ prostoliniowych *prętów* pryzmatycznych (o stałym przekroju) połączonych ze sobą w *węzłach* za pomocą pozbawionych tarcia *przegubów*.

Kratownice płaskie mogą stanowić samodzielną konstrukcję nośną bądź być częścią większej konstrukcji – kratownicy przestrzennej.

Najbardziej typowym rozwiązaniem wykorzystującym kratownice jako konstrukcje nośne są wszelkiego rodzaju ustroje nośne utrzymujące stropy budynków, hal itp.

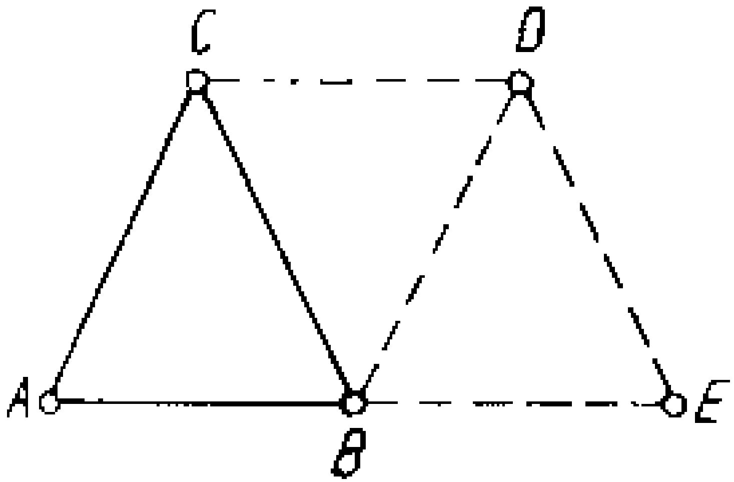
Kratownica

Kratownica może być:

1) płaska, gdy wszystkie pręty leżą w jednej płaszczyźnie,

2) przestrzenna, gdy pręty nie leżą w jednej płaszczyźnie.

Sposób budowania kratownicy

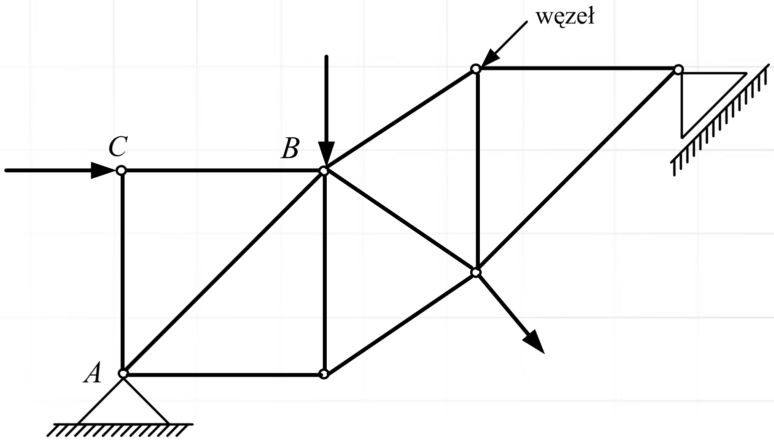


Rys. 2.

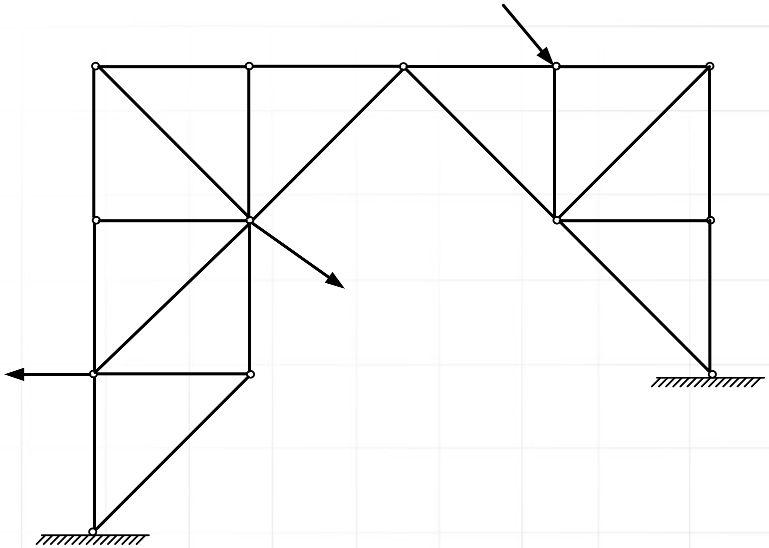
Kratownica

Ograniczając się do kratownic płaskich, dokonamy ogólnego ich podziału na:

- kratownice o strukturze prostej, które powstają z trójkąta wyjściowego drogą tworzenia węzłów przez kolejne dołączanie dwóch prętów nie leżących na jednej prostej.



- kratownice o strukturze złożonej, które nie dadzą się zbudować w wyżej opisany sposób.



Równowaga trzech sił

Rozwiązywanie kratownicy polega na znalezieniu sił wewnętrznych w prętach dla danego obciążenia zewnętrznego kratownicy.

Przy rozwiązywaniu kratownic najczęściej zakładamy:

1) siły są w równowadze, zarówno dla całej kratownicy jak i dla poszczególnych węzłów,

2) siły przyczepione są w węzłach kratownicy,

3) pręty połączone są w węzłach przegubami idealnymi, tj. bez tarcia,

4) kratownica jest sztywna, tzn. przy założeniu prętów jako doskonale sztywnych i przegubów idealnych, dwa dowolne węzły nie mogą się przemieszczać względem siebie.

Rozwiązywanie kratownicy

W prętach kratownicy występują tylko siły normalne stałe na całej długości pręta. Zgodnie z przyjętymi wcześniej zasadami znakowania, siły te będziemy uważali za dodatnie, jeżeli będą one rozciągały pręt, a za ujemne, jeśli będą one ściskane.

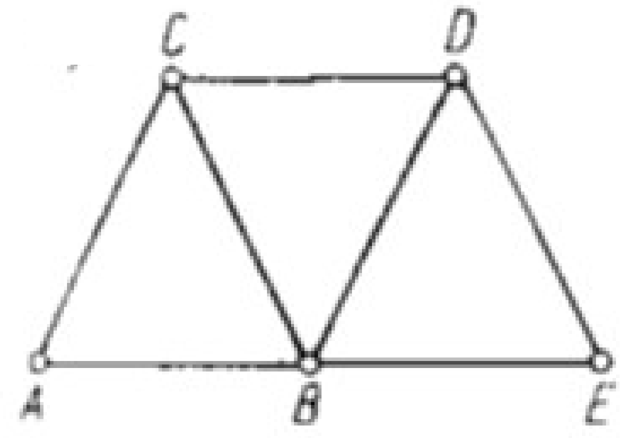
Każdy z węzłów kratownicy jest w równowadze pod wpływem sił zewnętrznych i sił w prętach, tworzących zbieżny układ sił. Możemy zatem ułożyć po trzy równania równowagi dla każdego węzła; łącznie możemy ułożyć **3w** równań.

Kryteria sztywności

Kratownica żeby była sztywna i niezmiennie geometrycznie to dla kratownicy płaskiej

$p = 2w - 3$,

dla kratownicy przestrzennej
$p = 3w - 6$

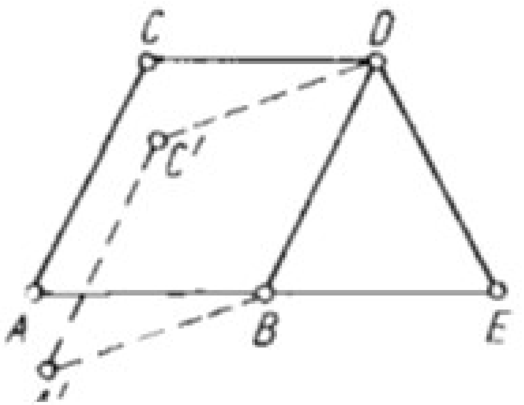


Kratownica statycznie wyznaczalna

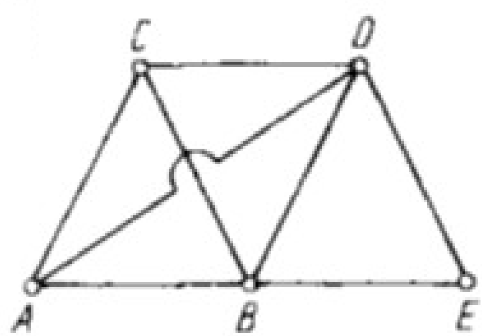
gdzie: p – liczba prętów, w – liczba węzłów.

Kryteria sztywności

Gdy $p < 2w - 3$ dla kratownicy płaskiej, lub $p < 3w - 6$ dla przestrzennej, to *kratownica jest niesztywna* (geometrycznie zmienna),



natomiast gdy $p > 2w - 3$ dla kratownicy płaskiej, lub $p > 3w - 6$ dla przestrzennej, to *kratownica jest przesztywniona* (statycznie niewyznaczalna).



Metody rozwiązywania kratownic

Siły w prętach kratownic statycznie wyznaczalnych wyznaczamy korzystając tylko z warunków równowagi.

W zależności od sposobu korzystania z warunków równowagi istnieje kilka metod wyznaczania sił w prętach kratownic.

Metody analityczne
- metoda zrównoważenia węzłów,
- metoda Rittera - równoważenie odciętych części kratownicy.

Metody wykreślne
- metoda Cremony - graficznego równoważenia węzłów,
- metoda Culmanna - graficznego równoważenia odciętych części kratownicy.

Metody analityczne

Przy rozwiązywaniu kratownicy metodą analityczną należy:

1) sprawdzić warunek sztywności kratownicy,

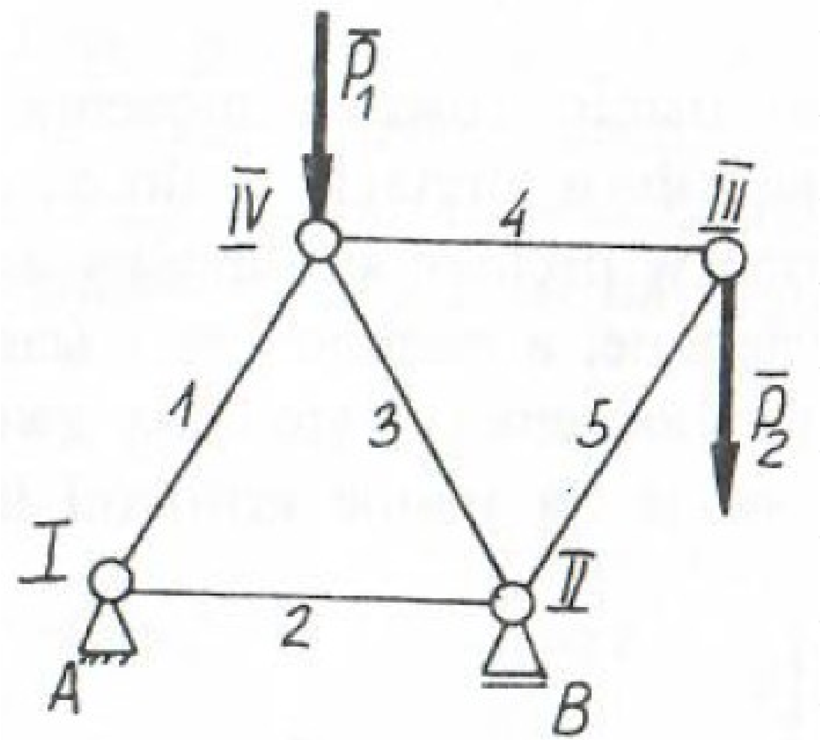
2) po naniesieniu sił zewnętrznych działających na kratownicę, należy obliczyć reakcje podpór, traktując kratownicę jako sztywną całość,

3) obliczyć siły wewnętrzne w prętach, pisząc warunki równowagi dla poszczególnych węzłów kratownicy.

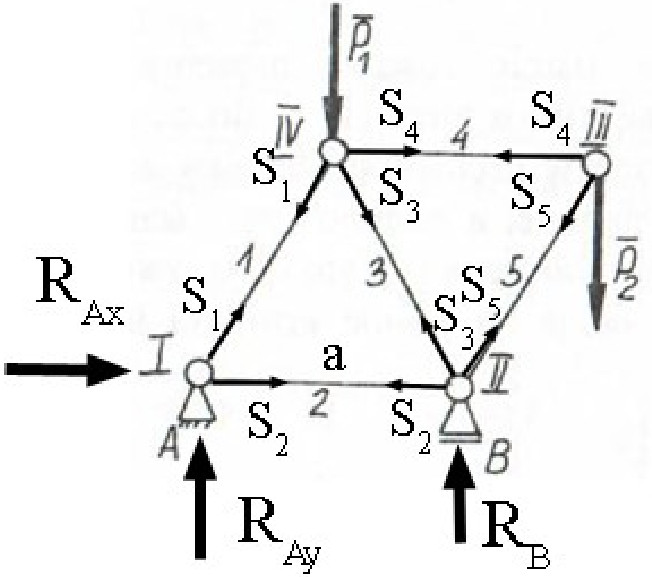
Metoda wydzielania węzłów

Metoda polega na ułożeniu dla każdego z węzłów równań równowagi przez rzutowanie sił na dwie nierównoległe proste, na przykład:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0$$



Metoda wydzielania węzłów



I)

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = R_{Ax} + S_2 + S_1 \cdot \cos 60^o = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = R_{Ay} + S_1 \cdot \sin 60^0 = 0$$

II)

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = - S_2 - S_3 \cdot \cos 60^o + S_5 \cdot \cos 60^o = 0$$

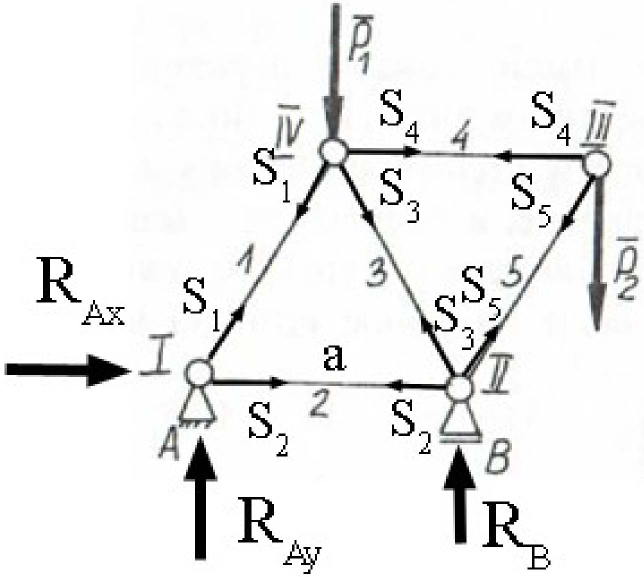
$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = R_B + S_3 \cdot \sin 60^0 + S_5 \cdot \sin 60^o = 0$$

Metoda wydzielania węzłów

III)

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = -S_4 - S_5 \cdot \cos 60^o = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = -P_2 - S_5 \cdot \sin 60^0 = 0$$



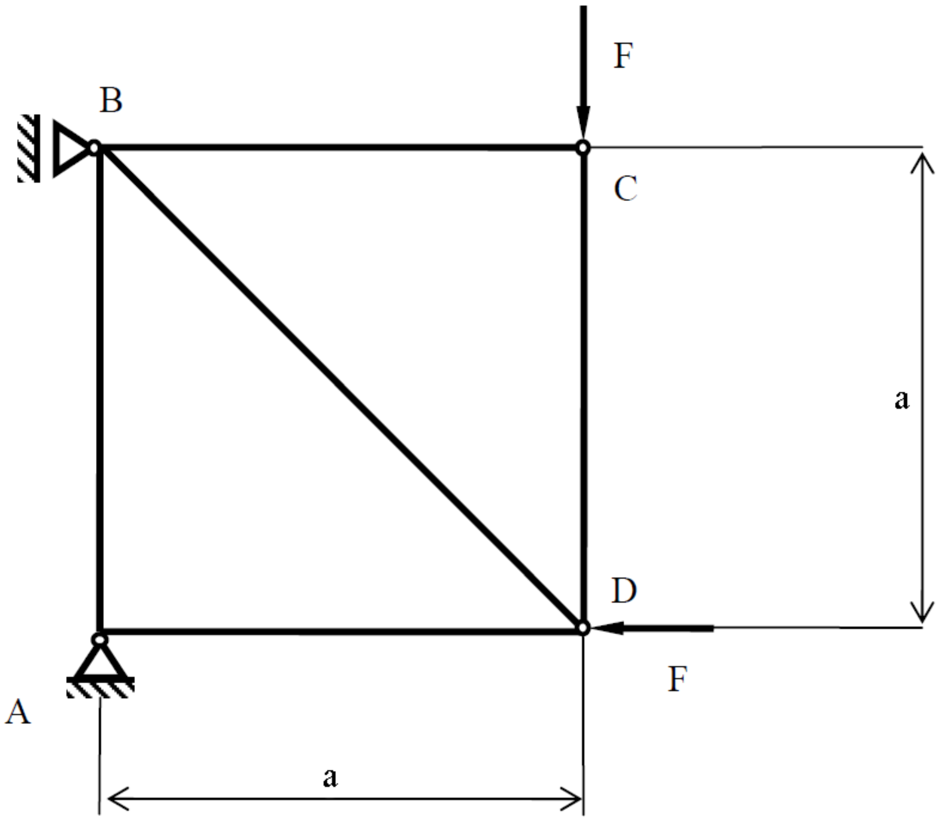
IV)

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = -S_2 \cdot \cos 60^o + S_3 \cdot \cos 60^o + S_4 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = -P_1 - S_2 \cdot \sin 60^0 + S_3 \cdot \sin 60^o = 0$$

Przykład

Kratownicę zamocowaną przegubowo na podporze nieruchomej w węźle *A* i podporze ruchomej w węźle *B*, zwymiarowaną jak na rysunku, obciążoną w węzłach *C* i *D* siłami *F* = 5 [kN] rozwiązać metodą analitycznego równoważenia węzłów.



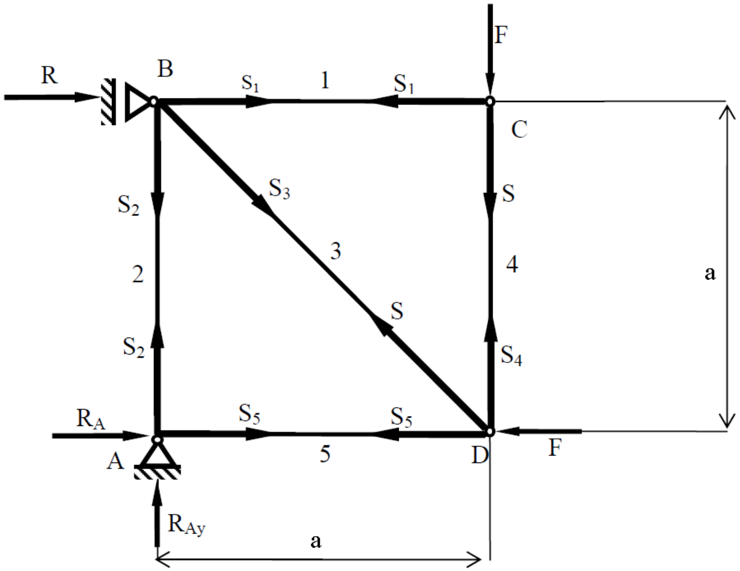
Rozwiązanie

Przed przystąpieniem do wyznaczania sił wewnętrznych w prętach kratownicy sprawdzamy warunek statycznej wyznaczalności kratownicy:

$$p = 2w - 3$$

$5 = 2 \cdot 4 - 3$ - kratownica jest statycznie wyznaczalna.

1) Określenie reakcji



Rozwiązanie

Założono, że siły te działają „od węzła” (ze znakiem +) czyli rozciągają pręty. Zwrot rzeczywisty siły wynika z obliczonej wartości siły w pręcie. Wartość dodatnia wskazuje na prawidłowo założony znak, wartość ujemna mówi, że przyjęty znak jest w rzeczywistości przeciwny. Ponieważ, w kratownicy mamy cztery węzły, więc uzyskamy osiem równań równowagi, które pozwolą na wyznaczenie niewiadomym wartości (trzech reakcji i pięciu sił w prętach).

2)

Rozwiązywanie zaczyna się od węzła, w którym schodzą się dwie niewiadome sił wewnętrznych.

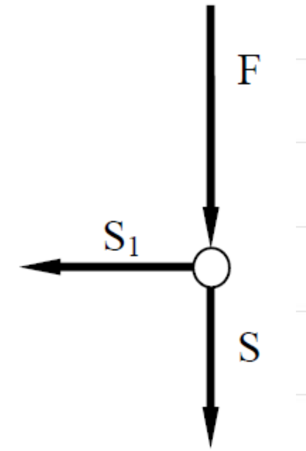
Warunki równowagi węzła *C:*

Rozwiązanie

C)

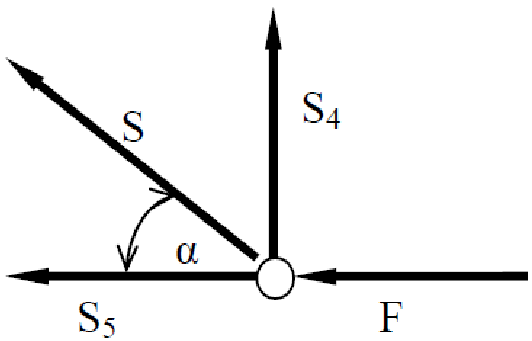
$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = -S_1 = 0 \;\Rightarrow\; S_1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = -F - S_4 = 0 \Rightarrow S_4 = -F = -5\,[\mathrm{kN}]$$



Warunki równowagi węzła D:

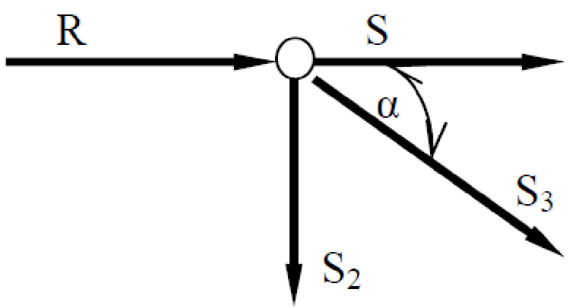
D)



$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = S_4 + S_3 \cdot \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; S_3 = -\frac{S_4}{\sin\alpha} = \frac{2F}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\ [\mathrm{kN}]$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = -S_5 - S_3 \cdot \cos\alpha - F = 0 \Rightarrow S_5 = -S_3 \cos\alpha - \sqrt{2}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F = -2F = -10\,[\mathrm{kN}]$$

Rozwiązanie



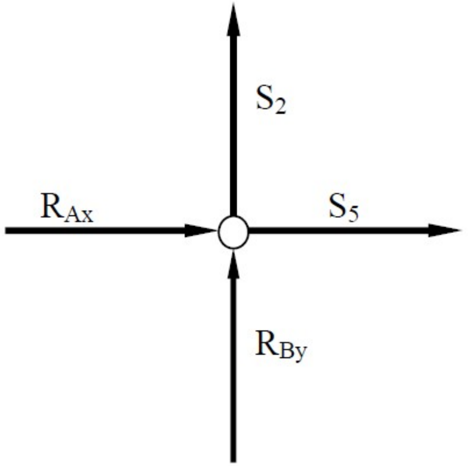
Warunki równowagi węzła B:

B)

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = R_B + S_1 + S_3 \cdot \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; R_B = -S_1 - S_3 \cos\alpha = -F = -5 \text{ [kN]}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = -S_2 - S_3 \cdot \sin\alpha = 0 \Rightarrow S_2 = -S_3 \sin\alpha = -\sqrt{2}F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - F = -5 \text{ [kN]}$$

Warunki równowagi węzła A:



A)

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = R_{Ax} + S_5 = 0 \;\Rightarrow\; R_{Ax} = -S_5 = 10 \text{ [kN]}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = R_{Ay} + S_2 = 0 \Rightarrow R_{Ay} = -S_2 = F = 5 \text{ [kN]}$$

Rozwiązanie

Zestawienie wyników

Siła	Wartość [kN]	Obciążenie pręta
S_1	0	zerowy
S_2	-5	ściskany
S_3	$5\sqrt{2}$	rozciągany
S_4	-5	ściskany
S_5	-10	ściskany
R_{Ax}	10	rozciągany
R_{Ay}	5	rozciągany
R_B	-5	ściskany

Rozwiązanie

Korzystając z warunków zewnętrznej statycznej równowagi (warunków równowagi układu sił zewnętrznych działających na kratownicę) obliczamy ponownie wartości reakcji podporowych:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = R_{Ax} + R_B - F = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{yi} = R_{Ay} - F = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{iA} = -R_B a - Fa = 0$$

Rozwiązanie

Z równań wyznaczamy:

$$R_B = -F = -5\,[\mathrm{kN}]$$

$$R_{Ay} = F = 5\,[\mathrm{kN}]$$

$$R_{Ax} = 10\,[\mathrm{kN}]$$

Jak widać naszą poprawność rozwiązania.

Metoda Rittera

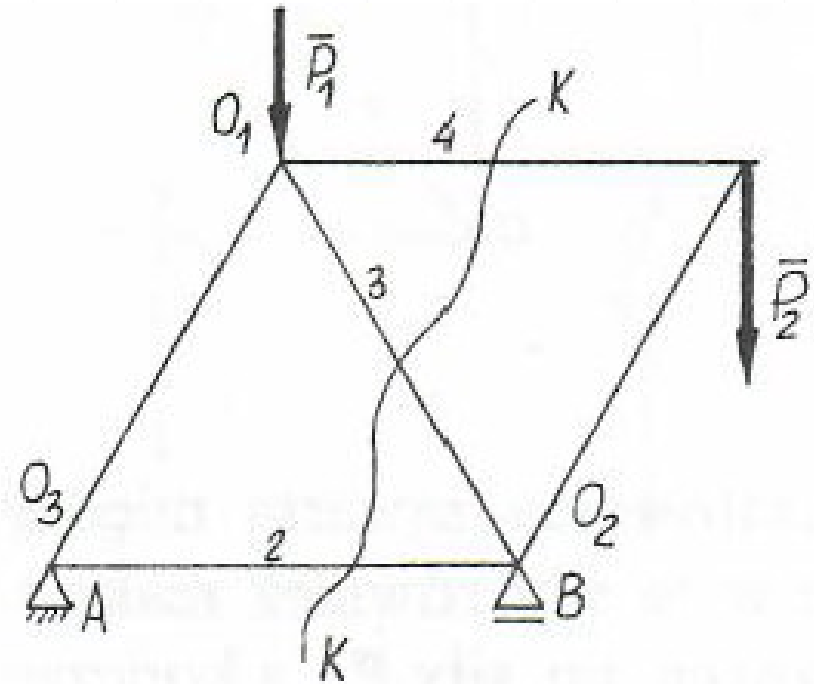
Metoda ta jest wygodna, gdy nie interesują nas siły we wszystkich prętach kratownicy.

Metoda polega na tzw. przecięciu, która pozwala na wyznaczeniu tylko 3 sił wewnętrznych kratownicy w jej pomyślanym przekroju.

Zasada polega na takim przecięciu, aby 3 pręty nie przecinały się w jednym punkcie. Analiza równowagi polega na części odciętej. Równania równowagi:

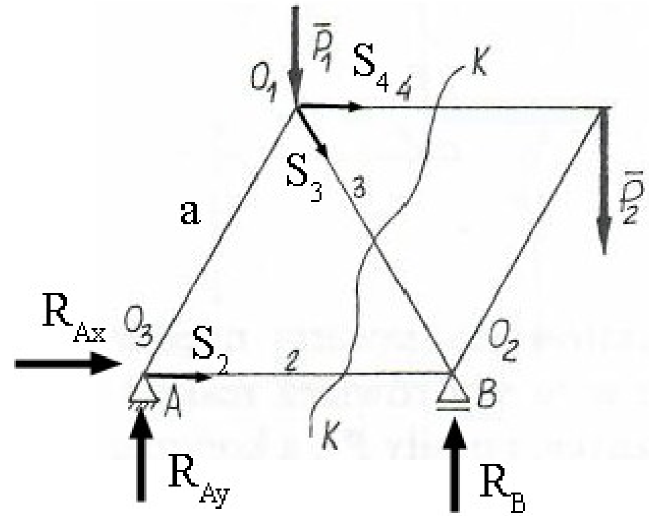
Metoda Rittera

$$\sum_{i=1}^{k} M_{0_1 i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} M_{0_2 i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} M_{0_3 i} = 0,$$



Metoda Rittera

Z równań momentów względem bieguna O_1, O_2, O_3,



$$\sum M_{0_1 i} = R_{Ay} \cdot a \cos 60^o + S_2 \cdot a \sin 60^o = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = R_{Ax} \cdot ctg\, 60^o = R_{Ax} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

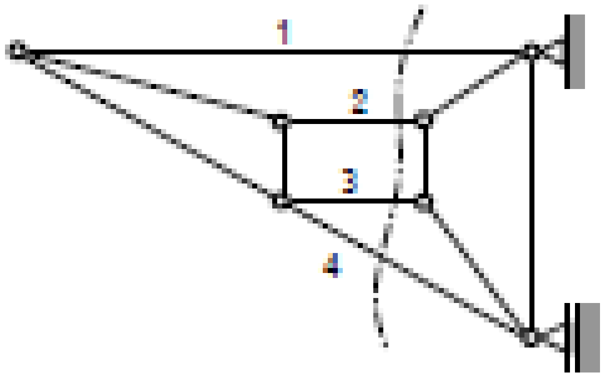
$$\sum M_{0_2 i} = R_{Ay} \cdot a + P_1 \cdot a \cos 60^o - S_4 \cdot a \sin 60^o = 0, \quad \Rightarrow \quad S_4 = \frac{2R_{Ay} + P}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} M_{0_3 i} = P_1 \cdot a \cos 60^o + S_4 \cdot a \sin 60^o + S_3 \cdot a \sin 60^o = 0, \quad \Rightarrow \quad S_3 = -\frac{P_1}{\sqrt{3}} - S_4$$

Metoda Rittera

Uwagi:

Można przeciąć więcej niż 3 pręty, ale pod warunkiem, że oprócz jednego pozostałe są równolegle,

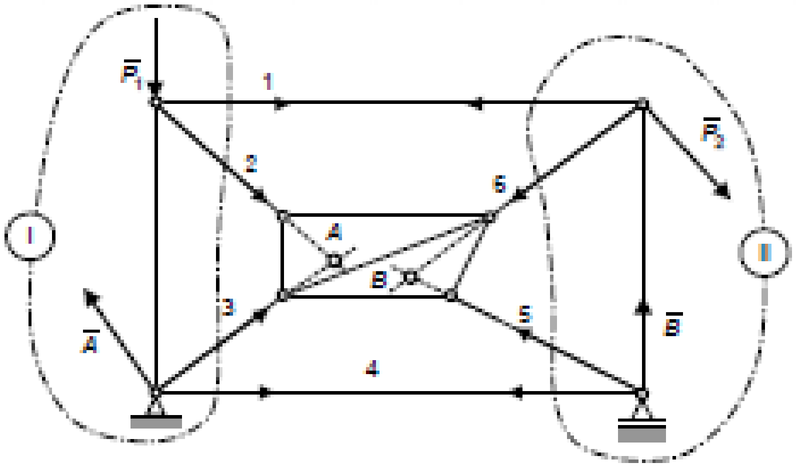


Przy złożonych kratownicach jeden przekrój może być niewystarczający, np.

$$M_A^I = f_1(S_1, S_4, P_1, A)$$

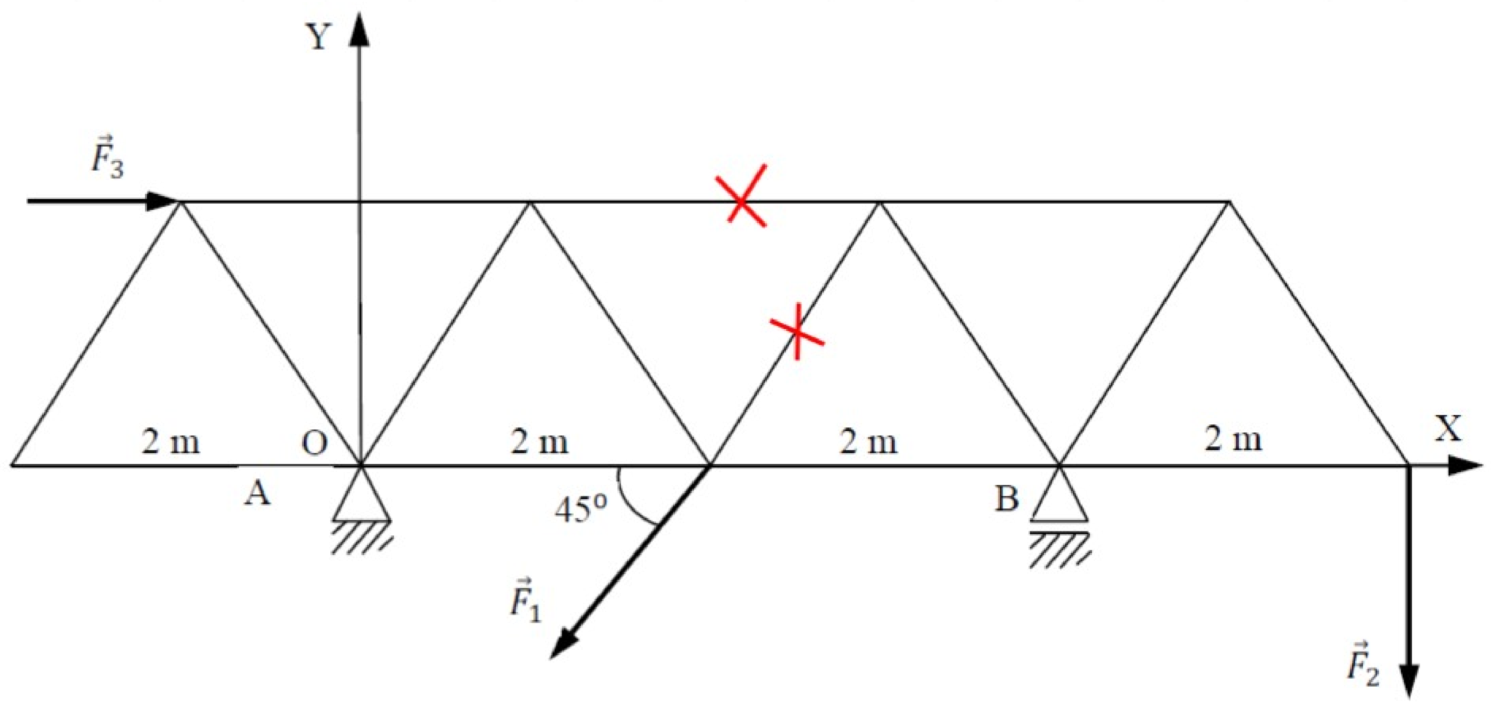
$$M_B^I = f_2(S_1, S_4, P_2, B)$$

Skąd obliczamy siły $S1$ i $S4$.



Przykład

Kratownica pokazana schematycznie na rysunku obciążona jest siłami o wartościach F_1=100kN, F_2=200kN, F_3=50kN. Pręty kratownicy tworzą trójkąty równoboczne o boku 2m. Należy wyznaczyć siły wewnętrzne we wskazanych prętach kratownicy (czerwony znacznik) metodą przecięć Rittera.



Rozwiązanie

Sprawdzenie warunku koniecznej statycznej rozwiązywalności kratownicy płaskiej: n=2w-p-3

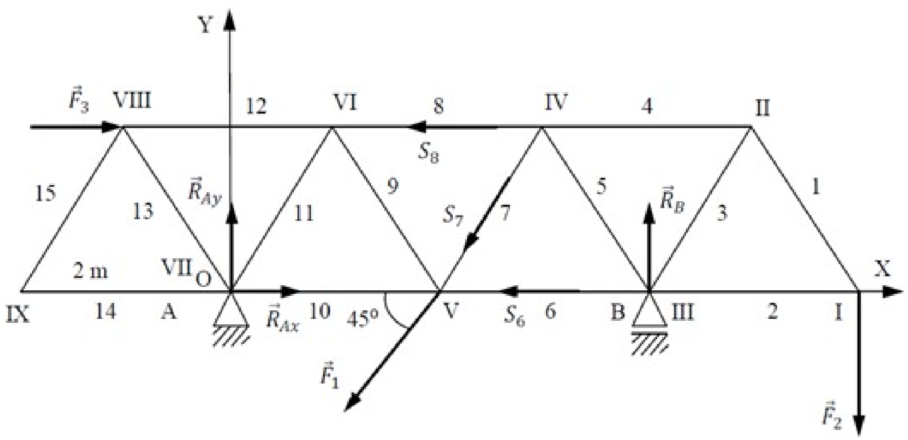
n – współczynnik statycznej wyznaczalności

w – liczba węzłów,

p – liczba prętów

W tym przypadku: p=15, w=9 → n=18-15-3=0

Wyznaczyć reakcje w podporach



$$\sum F_{ix} = F_3 + R_{Ax} - F_1 \cos 45^o = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} - F_1 \cos 45^o + R_B - F_2 = 0$$

$$\sum M_{iO} = - F_3 \cdot \sqrt{3} - F_1 \cos 45^o \cdot 2 + R_B \cdot 4 - F_2 \cdot 6 = 0$$

Rozwiązanie

Otrzymujemy wartości:

$$R_{Ax} = F_1 \cos 45^o - F_3 = 50\sqrt{2} - 50 = 50(\sqrt{2} - 1) \approx 20{,}71\,[\mathrm{kN}]$$

$$R_B = \frac{3}{2} F_2 + \frac{\sqrt{3}}{4} F_3 + \frac{\sqrt{2}}{4} F_1 \approx 357\,[\mathrm{kN}]$$

$$R_{Ay} = F_1 \sin 45^o - R_B + F_2 \approx - 86{,}3\,[\mathrm{kN}]$$

Rozwiązanie

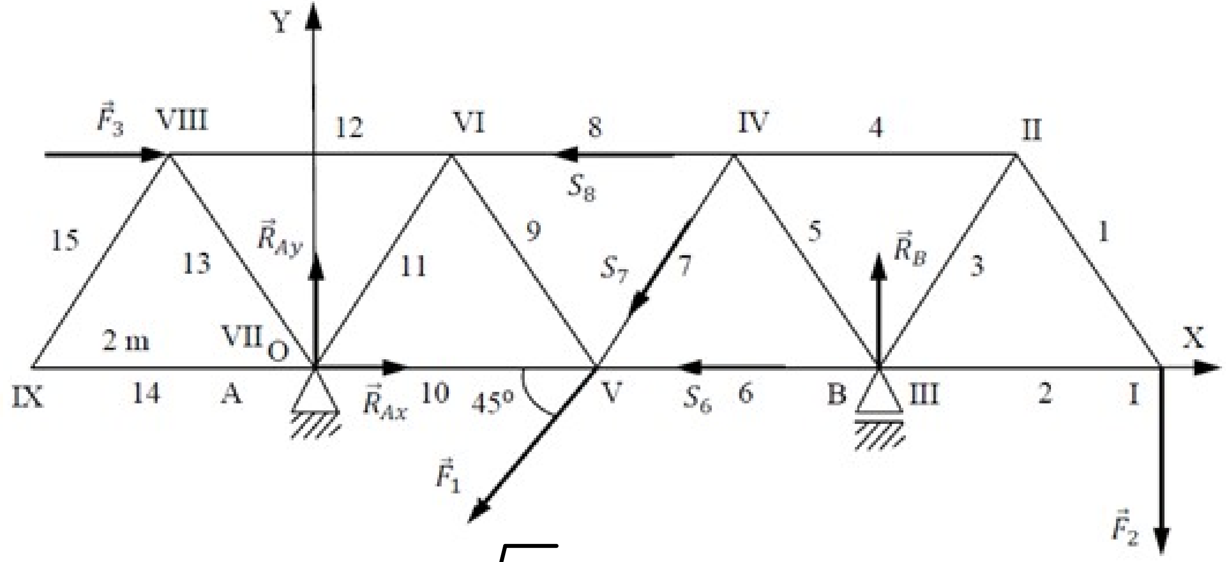
Metoda ta polega na myślowo rozcięciu kratownicy na 2 części. W zadaniu należy wyznaczyć siły wewnętrzne w 2 prętach, jednakże kratownice przecinamy w 3 prętach.

Należy pamiętać, że kratownicę tak przecinamy aby liczba prętów była tylko równa 3 (3RRS).

Odrzuca się myślowo jedną część kratownicy. W naszym przypadku odrzucamy lewą część. W miejsce odrzucone przykłada się siły wewnętrzne. Zakłada się zwroty sił w prętach.

Formułuje się równania równowagi statycznej sił działających tylko na część prawą.

Rozwiązanie



$$\sum M_{iIV} = R_B \cdot 1 - F_2 \cdot 3 - S_6 \cdot \sqrt{3} = 0$$

$$\sum M_{iV} = S_8 \cdot \sqrt{3} + R_B \cdot 2 - F_2 \cdot 4 = 0$$

$$\sum F_{iy} = - S_7 \cdot \cos 30^o + R_B - F_2 = 0$$

Z równań wyznaczamy wartości wybranych sił wewnętrznych prętów.

Rozwiązanie

Z równań wyznaczamy wartości wybranych sił wewnętrznych prętów.

$$S_6 = \frac{R_B - F_2 \cdot 3}{\sqrt{3}} \approx -140{,}3\,[\mathrm{kN}]$$

$$S_7 = \frac{R_B - F_2}{\cos 30^o} \approx 181{,}3\,[\mathrm{kN}]$$

$$S_8 = \frac{F_2 \cdot 4 - R_B \cdot 2}{\sqrt{3}} \approx 49{,}7\,[\mathrm{kN}]$$

Pręty 7 i 8 są rozciągane a pręt 6 jest ściskany.