Mechanika I
Kierunek: Transport

Belki, reakcje, siły wewnętrzne

Katedra Mechaniki, Inżynierii Materiałowej i Biomedycznej

Krzysztof Jamroziak

e-mail: krzysztof.jamroziak@pwr.edu.pl
Tel. 71 320 27 60

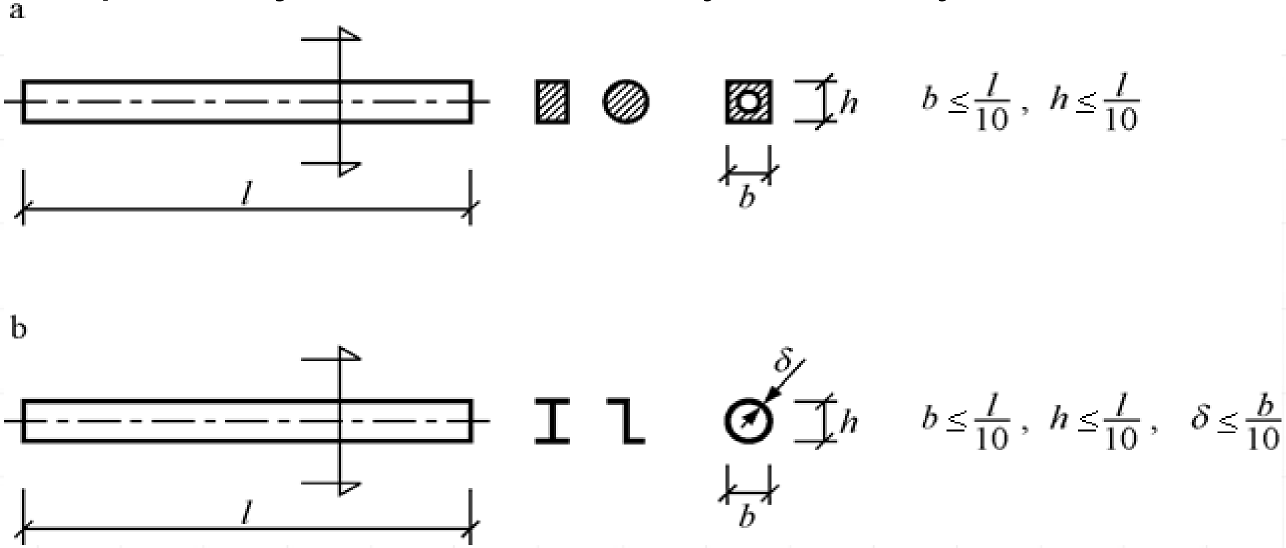
Konsultacje: wtorek: godz. 13.00-15.00
środa: godz. 13.00-15.00

Wprowadzenie

W obliczeniach konstrukcji modelami zastępczymi elementów maszyn są „belki”

Belką nazywa się pręt pryzmatyczny obciążony w jednej płaszczyźnie, w której zarazem leży oś pręta.

Pręt pryzmatyczny, którego dwa wymiary gabarytowe są o rząd mniejsze od wymiaru trzeciego. Przykłady prętów o przekroju zwartym podano na rys. 1a, a przykłady prętów o przekrojach cienkościennych – na rys. 1b.



Rys. 1. Przykład prętów pryzmatycznych: a) o przekroju zwartym, b) cienkościenny

Wprowadzenie

W odniesieniu do prętów obowiązują następujące definicje:

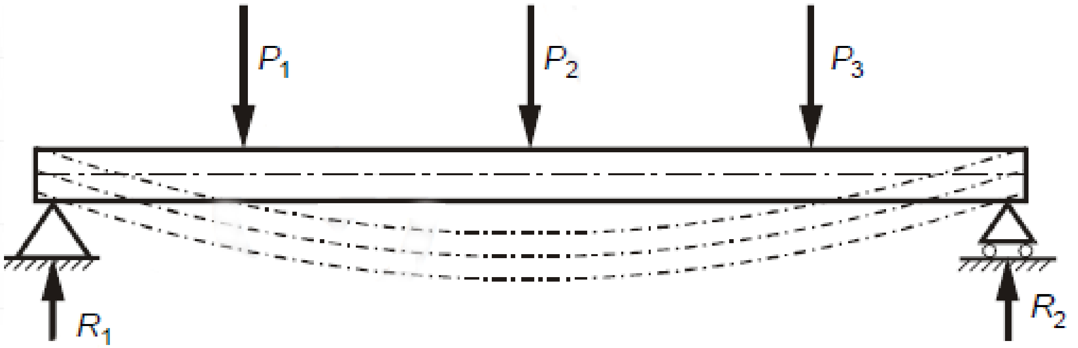
1. Przekroje poprzeczne są prostopadłe do osi pręta.
2. Przekrój poprzeczny jest figurą płaską, której przyporządkowany jest środek masy[1].
3. Oś pręta jest miejscem geometrycznym środków masy przekrojów poprzecznych.
4. Pręt pryzmatyczny ma oś prostoliniową, stały przekrój i tworzące równoległe do osi pręta.

Na schematach statycznych pręt jest przedstawiany za pomocą odcinka pokrywającego się z osią pręta.

[1] Środki mas figur będzie omówione w dalszych wykładach.

Ogólne ujęcie belki prostej

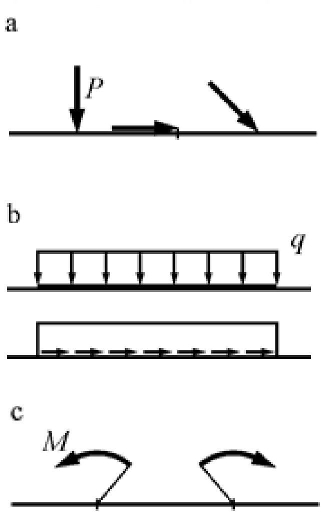
Wszystkie siły zewnętrzne czynne (obciążenia) i bierne (reakcje) leżące w jednej wspólnej płaszczyźnie przechodzącej przez oś belki powodują zginanie płaskie.



Rys. 2. Przykład belki obciążonej siłami zewnętrznymi

Obciążenia czynne:

- siły skupione lub par sił (oznaczenia P, P_i, Q,…; jednostki: N, kN);
- obciążenia ciągłe rozłożone równomiernie lub nierównomiernie wzdłuż belki (q, p, s, …; jednostki: N/m, kN/m)
- momenty skupione (M, M_i, Q,…; jednostki: N · m, kN · m).

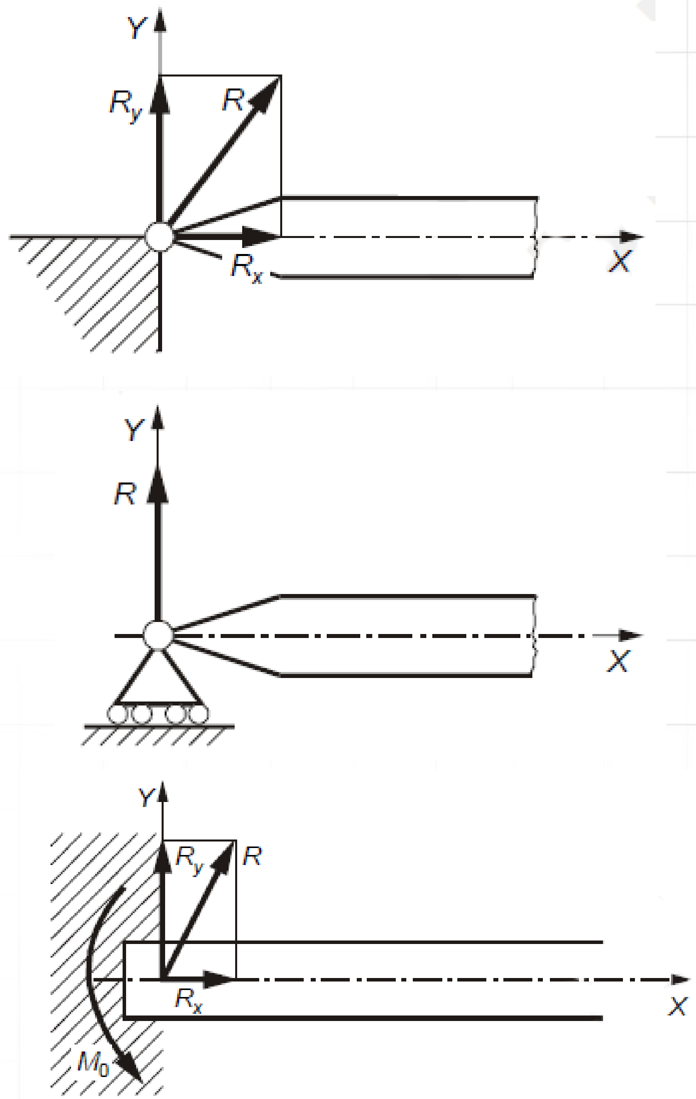


Siły zewnętrzne bierne (reakcje) występujące od następujących rodzajów podpór:

1) podpora przegubowa stała,

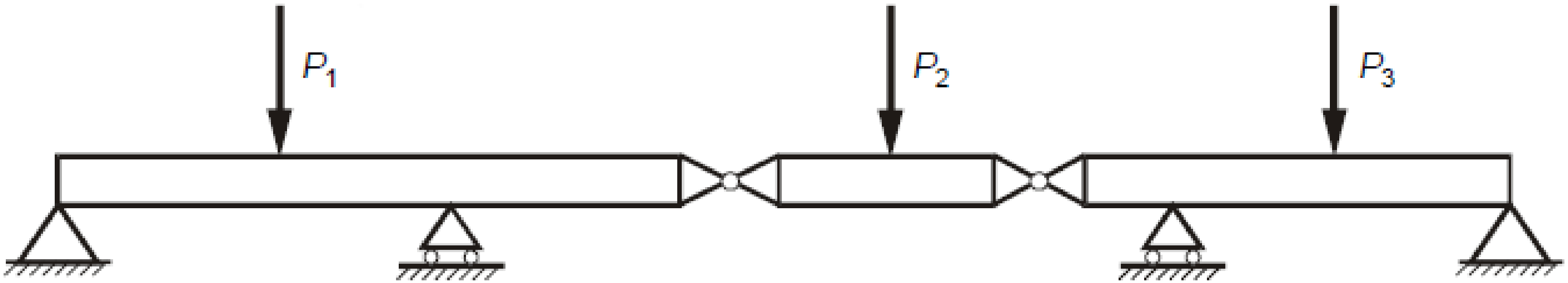
2) podpora przegubowa ruchoma,

3) utwierdzenie.



Rys. 3.

Występują także belki ciągłe przegubowe.



Rys. 4.

Wyznaczanie reakcji belek w płaskim układzie

Wyznaczanie warunków równowagi statycznej (siły czynne plus reakcje) sprowadza się do 3RRS:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{i\mathrm{O}} = 0$$

gdzie „O” jest dowolnym punktem.

Uwaga!!!
Belki zazwyczaj posiadają kierunek poziomy, a siły kierunek pionowy wtedy układ redukuje się do 2RRS.

Wyznaczanie reakcji belek w płaskim układzie

Uwaga!!!
Jeśli liczba niewiadomych reakcji jest równa lub mniejsza RRS, belka jest statycznie wyznaczalna, w przeciwnym razie niewyznaczalna.

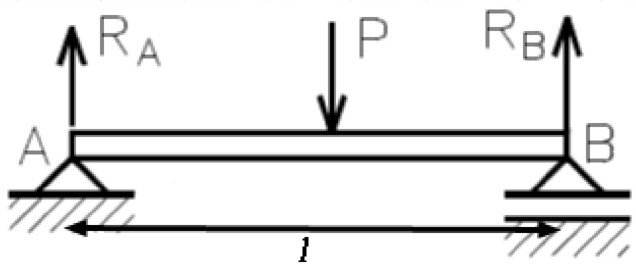
W belkach ciągłych przegubowych:

- wyznaczyć warunki równowagi belek podwieszanych,
- znaleźć reakcje jak przy belkach na dwóch podporach,
- wyznaczone reakcje przenieść na belki podstawowe,
- znając wielkości w przegubach wyznaczamy reakcje belek podstawowych.

Przykład

Wyznaczyć warunki równowagi statycznej dla następujących przypadków:

a)



$$\sum P_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\sum P_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} - P + R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = P - R_B$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B \cdot l - P \cdot \frac{1}{2} l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = \frac{1}{2} P$$

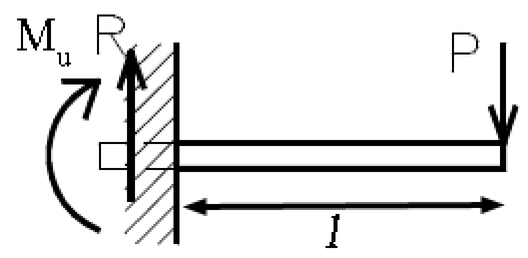
$$R_A = \frac{1}{2} P$$

Sprawdzenie

$$\sum M_B = R_A \cdot l - P \cdot \frac{1}{2} l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{1}{2} P$$

Przykład

Wyznaczyć warunki równowagi statycznej dla następujących przypadków:



b)

$$\sum M_P = 0 \;\Rightarrow\; M_u = R \cdot l$$

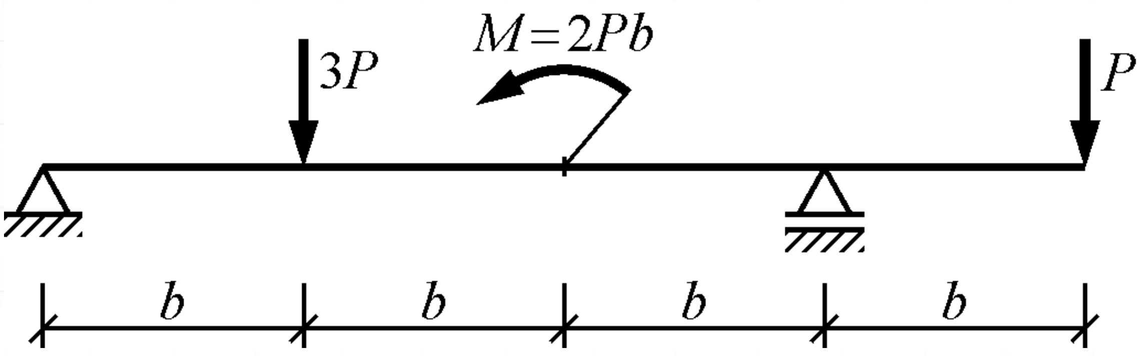
$$\sum M_R = 0 \;\Rightarrow\; M_u = P \cdot l$$

Sprawdzenie

$$\sum P_y = R - P \;\Rightarrow\; R = P$$

Zadanie

Wyznaczyć reakcje na podporach belki wspornikowej (Rys. 5):



Rys. 5.

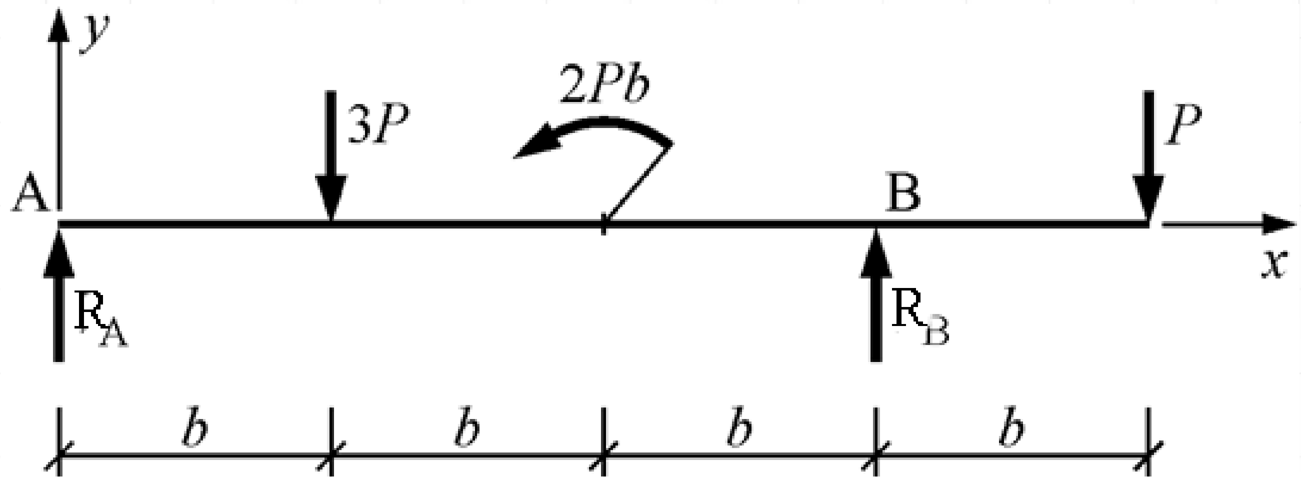
Rozwiązanie

Zakładamy układ geometrycznie niezmienny (GN)
Sprawdzenie SW $\rightarrow$ rs=3, p=1 rs=3p

Belka jest obciążona dwiema siłami pionowymi i parą sił o momencie $M=2Pb$ czyli określone mamy 2 parametry P [N] i b [m]

Zadanie

Zastępujemy belkę układem współrzędnych i reakcjami sił:



Rys. 6.

3RRS:

$$\sum P_x = 0 \quad \rightarrow \quad R_x = 0$$

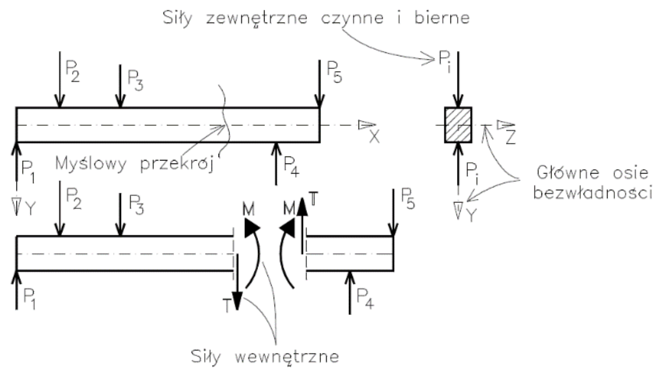
$$\sum P_y = 0 \quad \rightarrow \quad R_A - 3P + R_B - P = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad R_B \cdot 3b - 3P \cdot b + 2Pb - P \cdot 4b = 0$$

Siły wewnętrzne w belkach

W dowolnie pomyślanych przekrojach belki występują siły wewnętrzne zastępujące działanie jednej części belki na drugą.

Do wyznaczania sił wewnętrznych wykorzystuje się metodę myślowych przekrojów. Przy stałym przekroju belki granicami odcinków, w których należy dokonać myślowych przekrojów, są punkty przyłożenia sił zewnętrznych – czynnych i biernych (reakcji podporowych). Na rysunku pokazano zastosowanie metody myślowych przekrojów, układ współrzędnych (**oś Y skierowana jest w dół**, **oś X wzdłuż osi belki**) oraz siły wewnętrzne w belce.



Rys. 8.

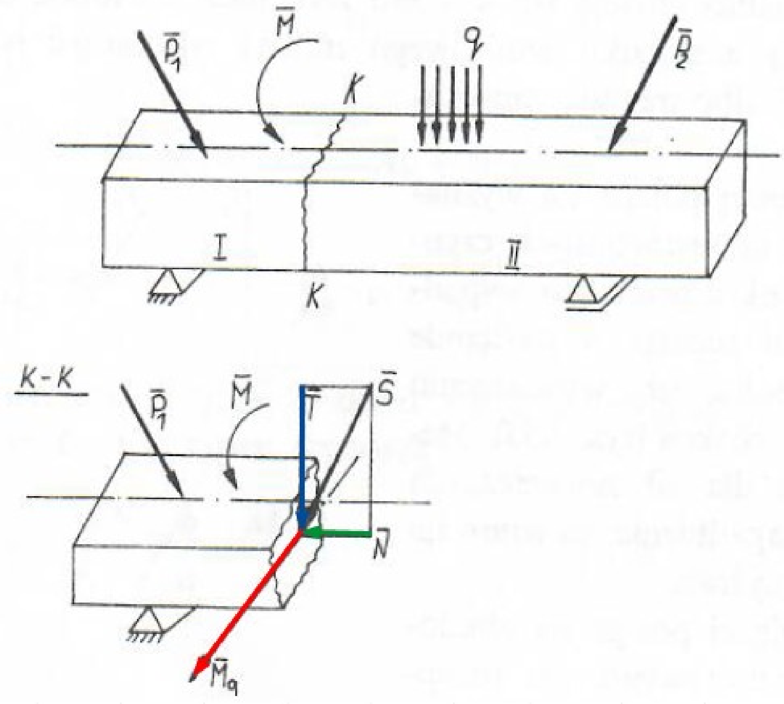
Siły wewnętrzne działające w danym przekroju wraz z siłami zewnętrznymi przyłożonymi do rozpatrywanej części belki tworzą układ równoważny zeru.

W dowolnym pomyślanym przekroju belki działają następujące siły wewnętrzne:

1) moment nazywany zginającym $\boldsymbol{M_g}$
2) siła poprzeczna $\boldsymbol{S}$

Wektor $\boldsymbol{M_g}$ jest prostopadły do płaszczyzny działania obciążeń (płaszczyzny x,y)

Siła poprzeczna $\boldsymbol{S}$ o dwóch składowych
Siła tnąca $\boldsymbol{T}$ prostopadła do osi belki
i siła Normalna $\boldsymbol{N}$ równoległa do osi belki.

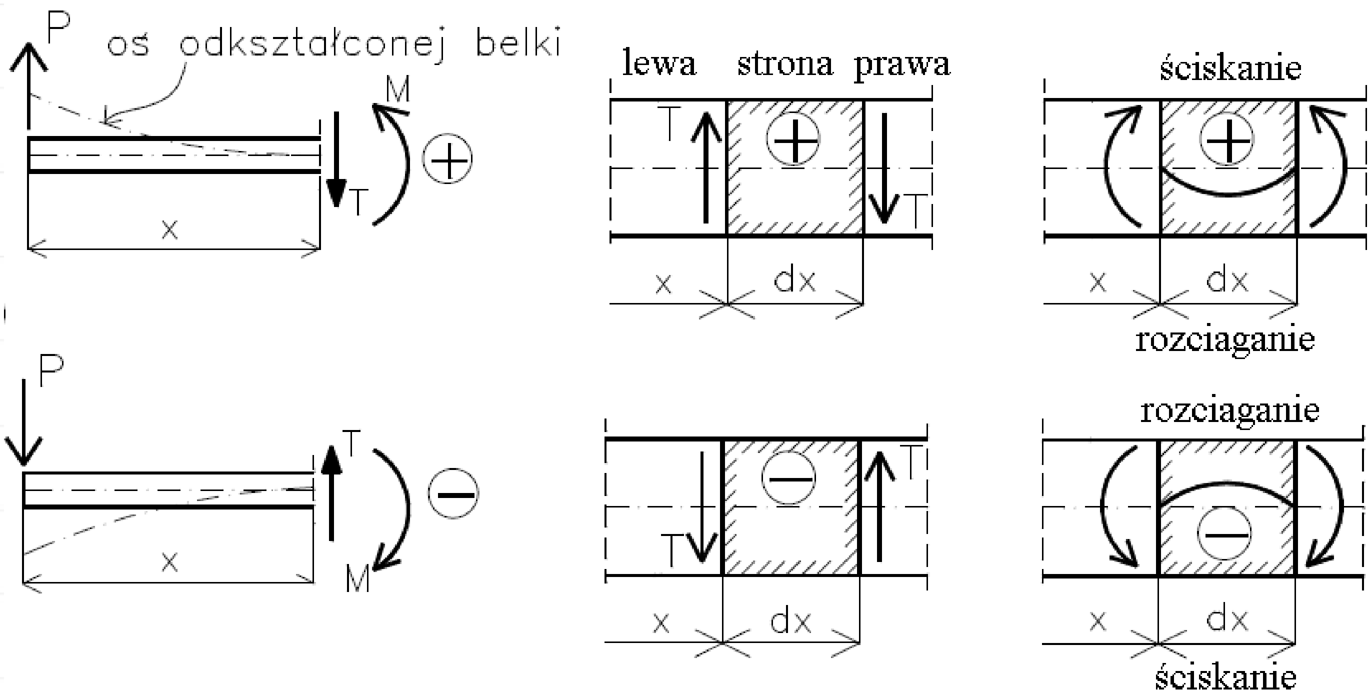


Rys. 9.

Moment gnący M_g jest sumą momentów wszystkich sił działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju belki.

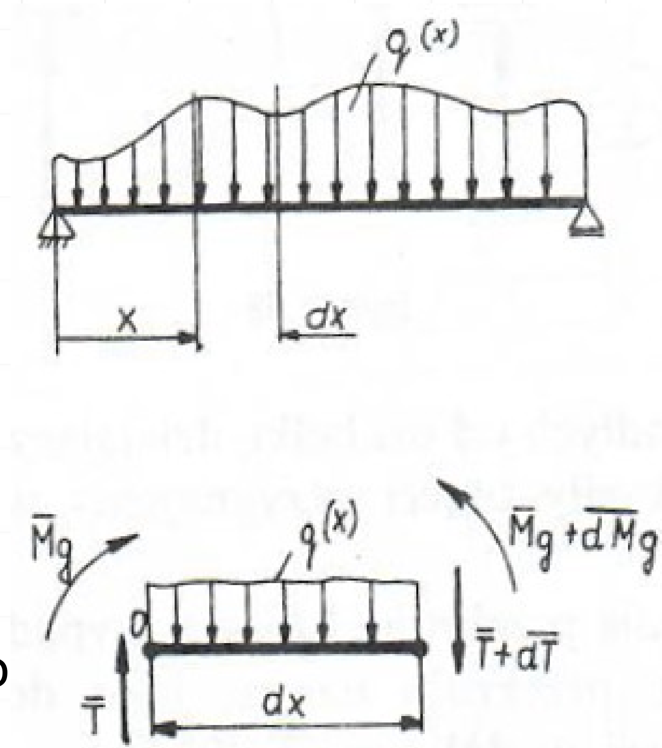
Siła tnąca T jest sumą wszystkich sił prostopadłych do osi belki działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju belki.

Umowne określenie znaków sił wewnętrznych jest następująca:



Twierdzenie Szwedlera

Odnosi się do związku różniczkowego między obciążeniami zewnętrznymi a wewnętrznymi w belce.



Rys. 11.

Przykład

Rozpatrzmy element o długości *dx* wycięty z belki.

Warunek momentów względem punku O:

$$M_g + q(x)dx\frac{dx}{2} + Tdx + dTdx - M_g - dM_g = 0$$

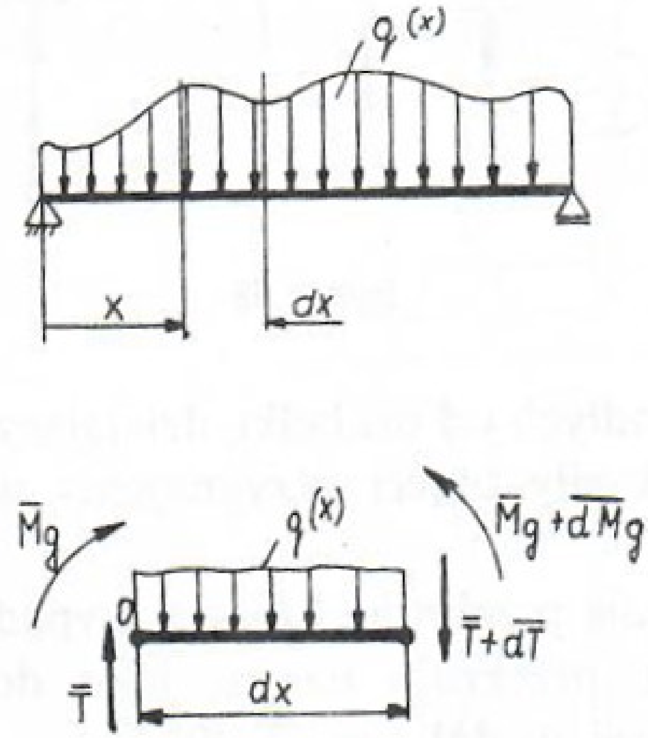
Upraszczając i pomijając wielkości małych drugiego rzędu mamy:

$$\frac{dM_g}{dx} = T$$

Pochodna momentu gnącego wzdłuż osi belki jest równa sile tnącej. Jest to tzw. **I twierdzenie Szwedlera**

Twierdzenie Szwedlera

Rzut na kierunek pionowy:



$$T - q(x)dx - T - dT = 0$$

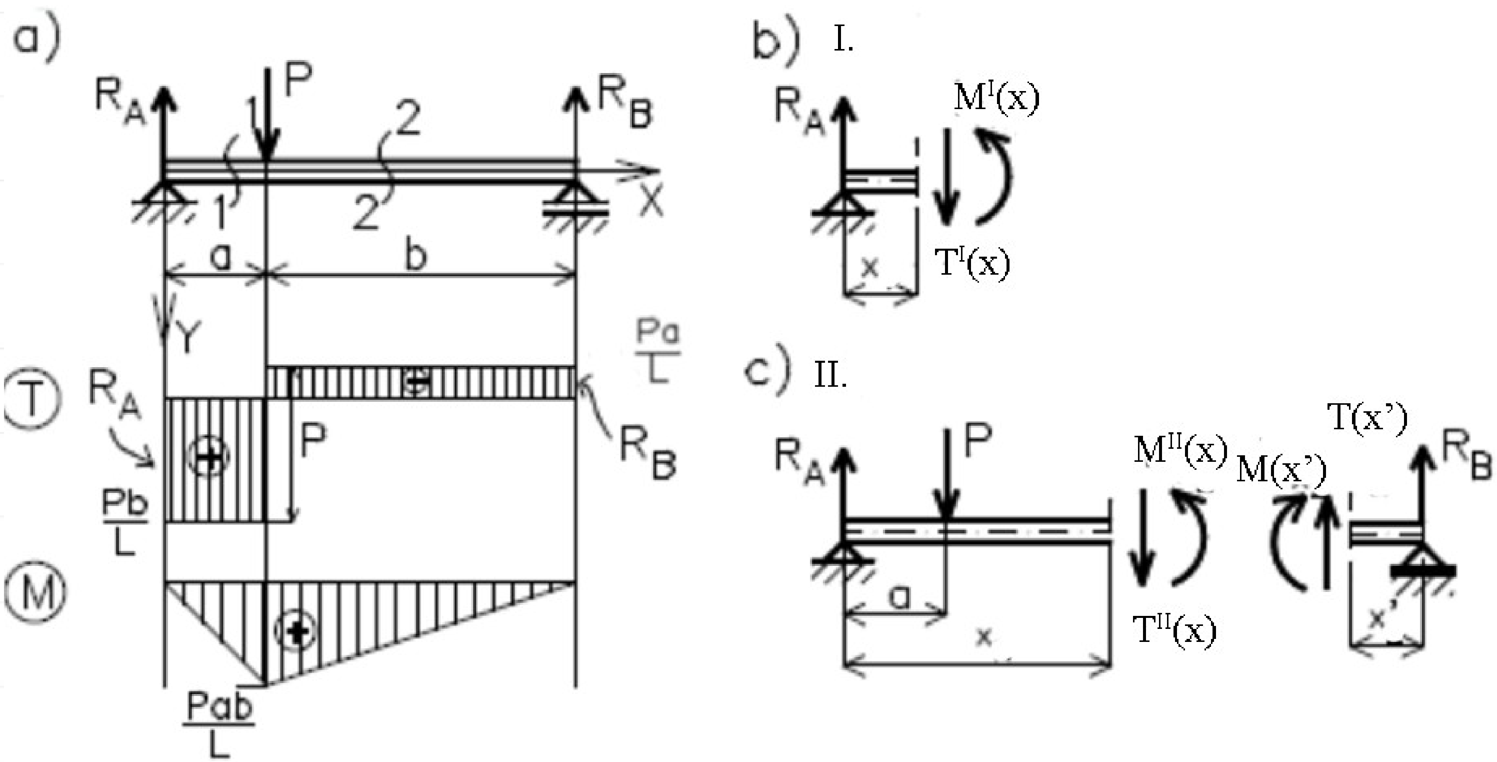
$$\frac{dT}{dx} = -q(x)$$

Rys. 11.

Pochodna siły tnącej wzdłuż osi belki jest równa obciążeniu ciągłemu ze znakiem przeciwnym. Jest to tzw. **II twierdzenie Szwedlera**

Przykład

Dla belki przedstawionej na rysunku wyprowadzić wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonać wykresy sił poprzecznych i momentów.



Rys. 12.

Rozwiązanie

Zadanie jest statycznie wyznaczalne. Założono, że L=a+b

a) Wyznaczenie reakcji podporowych (siły bierne)

$$\sum M_A = 0 \quad R_B L - Pa = 0 \;\rightarrow\; R_B = \frac{Pa}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A L - Pb = 0 \;\rightarrow\; R_A = \frac{Pb}{L}$$

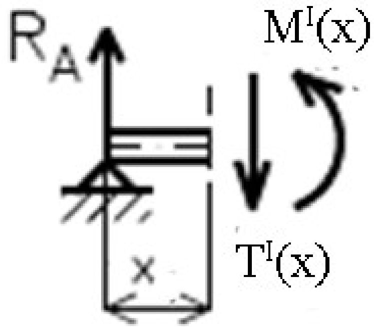
Sprawdzenie:

$$\sum P_y = 0 \quad R_A + R_B = P \;\rightarrow\; \frac{Pa}{L} + \frac{Pb}{L} = P\frac{\overbrace{(a+b)}^{L}}{L} = P$$

Rozwiązanie

Wydzielamy w belce dwa przedziały:

I przedział $\quad 0 \le x \le a$



Ogólne równanie momentów dla I przedziału:

$$M_g^I(x) = R_A \cdot x$$

$$M_g^I(0) = 0, \quad M_g^I(a) = P\frac{ab}{(a+b)}$$

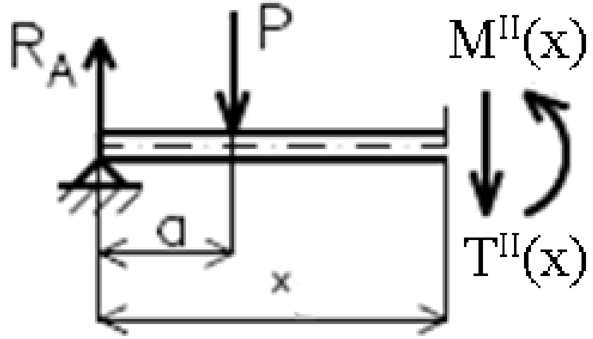
Siła tnąca dla I przedziału: $T^I(x) = R_A$

Są to funkcje stałe niezależne od *x*

$$T^I(0) = P\frac{b}{(a+b)}, \quad T^I(a) = P\frac{b}{(a+b)}$$

II przedział

$$a \le x \le a+b$$



Ogólne równanie momentów dla II przedziału:

$$M_g^{II}(x) = R_A \cdot x - P(x-a)$$

$$M_g^{II}(a) = P\frac{ab}{(a+b)}, \quad M_g^{II}(a+b) = 0$$

Siła tnąca dla II przedziału:

$$T^{II}(x) = R_A - P = -R_B \rightarrow R_B = -P\frac{a}{(a+b)}$$

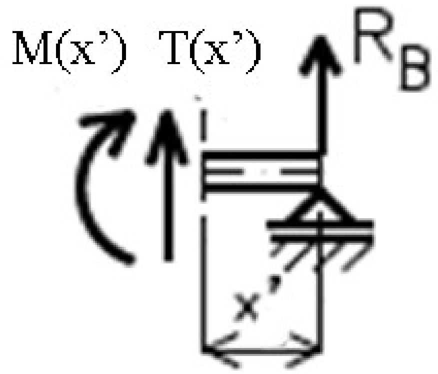
Są to funkcje stałe niezależne od *x*

$$T^{II}(a) = -P\frac{a}{(a+b)}, \quad T^{II}(a+b) = -P\frac{a}{(a+b)}$$

Sprawdzenie poprawności

przedział II'

$$0 \le x' \le b$$



$$M_g^B = R_B \cdot x'$$

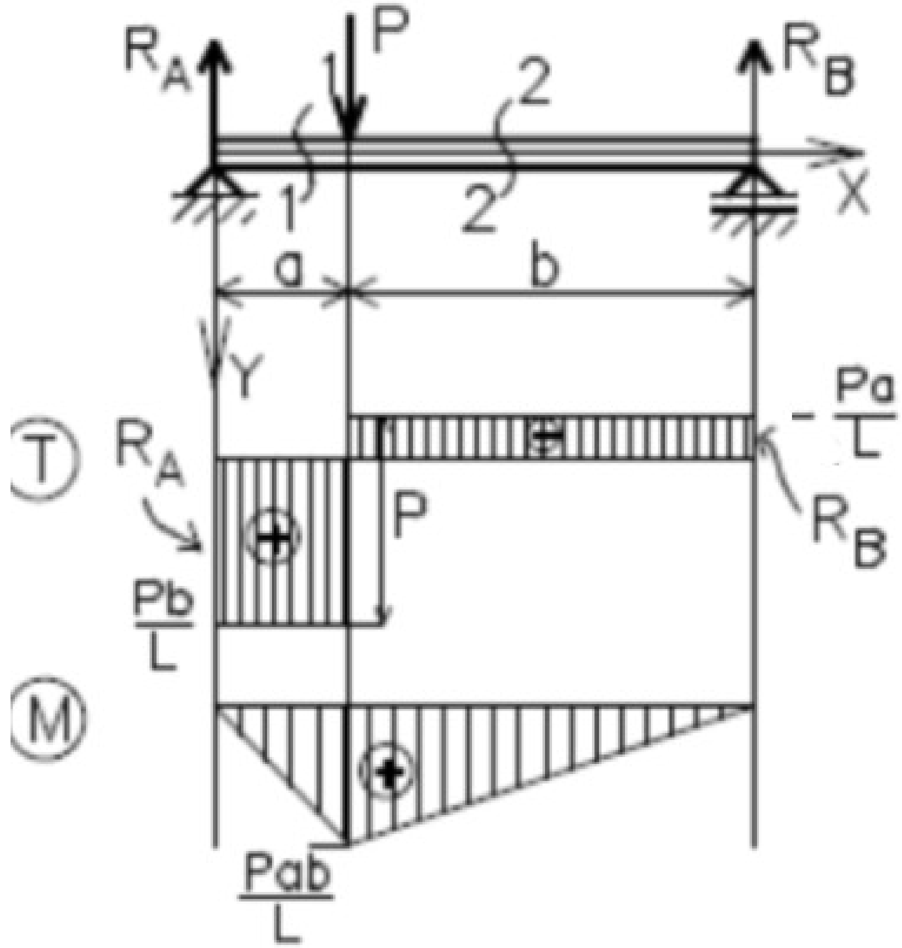
$$M_g^B(0) = 0, \quad M_g^B(b) = P\frac{ab}{(a+b)}$$

$$-T(x') = -R_B = -P\frac{a}{(a+b)}$$

$$-T(x') = -P\frac{a}{(a+b)}$$

Wykresy

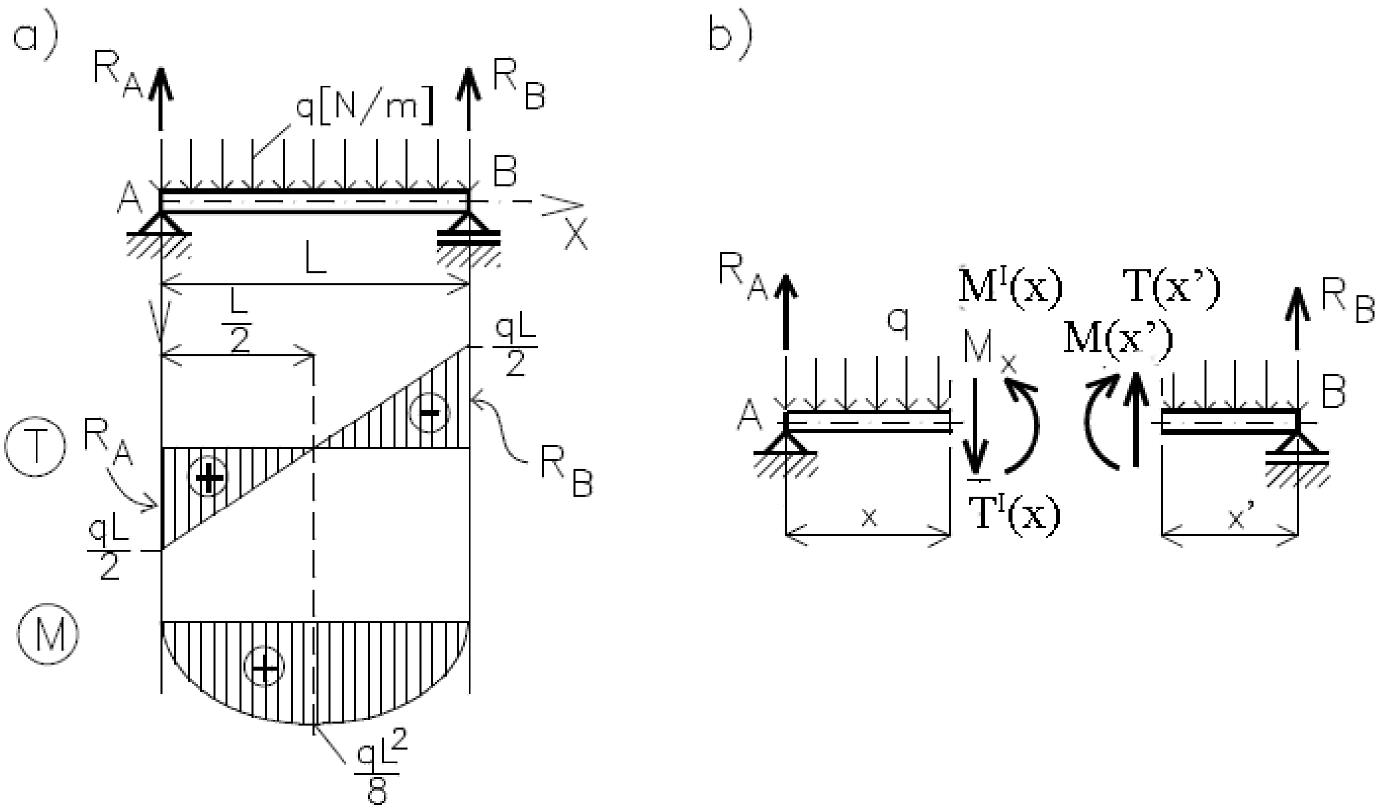
Wykresy T oraz M_g pokazano na rysunku poniżej.
Analizując je należy pamiętać, że na wykresach sił wewnętrznych muszą być widoczne wszystkie siły zewnętrzne. Na wykresie T uskoki odpowiadają siłom **P**, $\mathbf{R_A}$ i $\mathbf{R_B}$.
Na podporach A i B moment musi być równy zeru – na podparciu przegubowym nie ma momentu zewnętrznego.



Musi być także zachowana ciągłość wykresu M_g na końcu I i początku II przedziału

Przykład

Dla belki obciążonej w sposób ciągły obciążeniem o stałej intensywności ***q*** wykonać wykresy sił tnących i momentów zginających (Rys. 13)



Rozwiązanie

Obciążenie ciągłe ***q*** = const. działające na odcinku *L* zastępujemy siła wypadkową ***qL***, przyłożoną w połowie długości odcinka *AB*

a) Wyznaczenie reakcji podporowych (siły bierne)

$$\sum M_A = -R_B \cdot L + qL \cdot \frac{L}{2} \rightarrow R_B = q\frac{L}{2}$$

$$\sum M_B = R_A \cdot L - qL \cdot \frac{L}{2} \rightarrow R_A = q\frac{L}{2}$$

$$R_{Ax} = 0, \quad R_A = R_B = q\frac{L}{2}$$

Sprawdzenie:

$$\sum P_y = 0 \quad R_A + R_B - qL = 0 \rightarrow R_A = qL - R_B$$

Rozwiązanie

b) W belce rozpatrujemy tylko jeden przedział $0 \le x \le L$

$$M_g(x) = R_A \cdot x - qx\frac{x}{2} \rightarrow R_A x - q\frac{x^2}{2}$$

$$M_g(0) = 0, \quad M_g(L) = 0$$

$$T(x) = R_A - qx$$

$$T(0) = R_A = q\frac{L}{2} \quad T\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \qquad T(L) = R_A - qL = -q\frac{L}{2}$$

Do wykonania wykresu momentów potrzebny jest trzeci punkt, który można otrzymać obliczając ekstremum funkcji opisującej moment zginający:

I twierdzenie Szwedlera

$$\frac{dM_g}{dx} = T$$

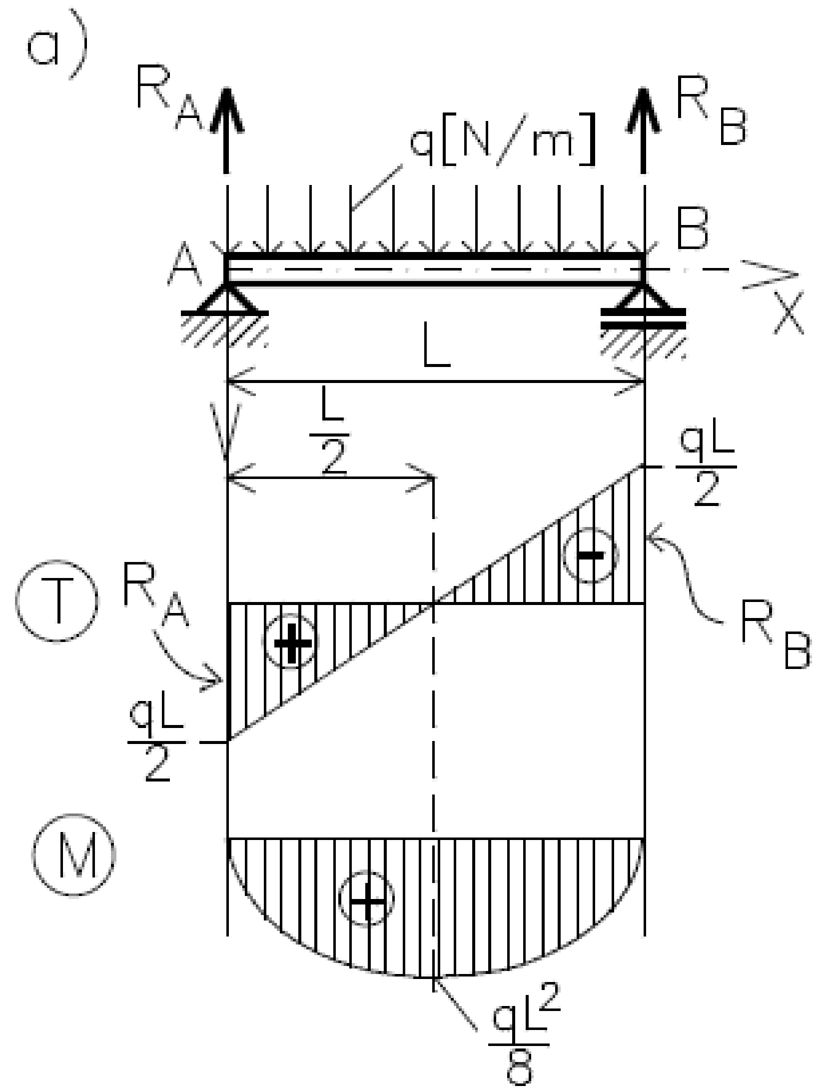
$$\frac{dM}{dx} = R_A - qx = T_x = 0 \rightarrow x_m = \frac{R_A}{q} = \frac{1}{2}L$$

$$M_{\max} = M(x_m) = R_A \cdot \frac{L}{2} - \frac{1}{2}q\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{qL^2}{8}$$

Rozwiązanie

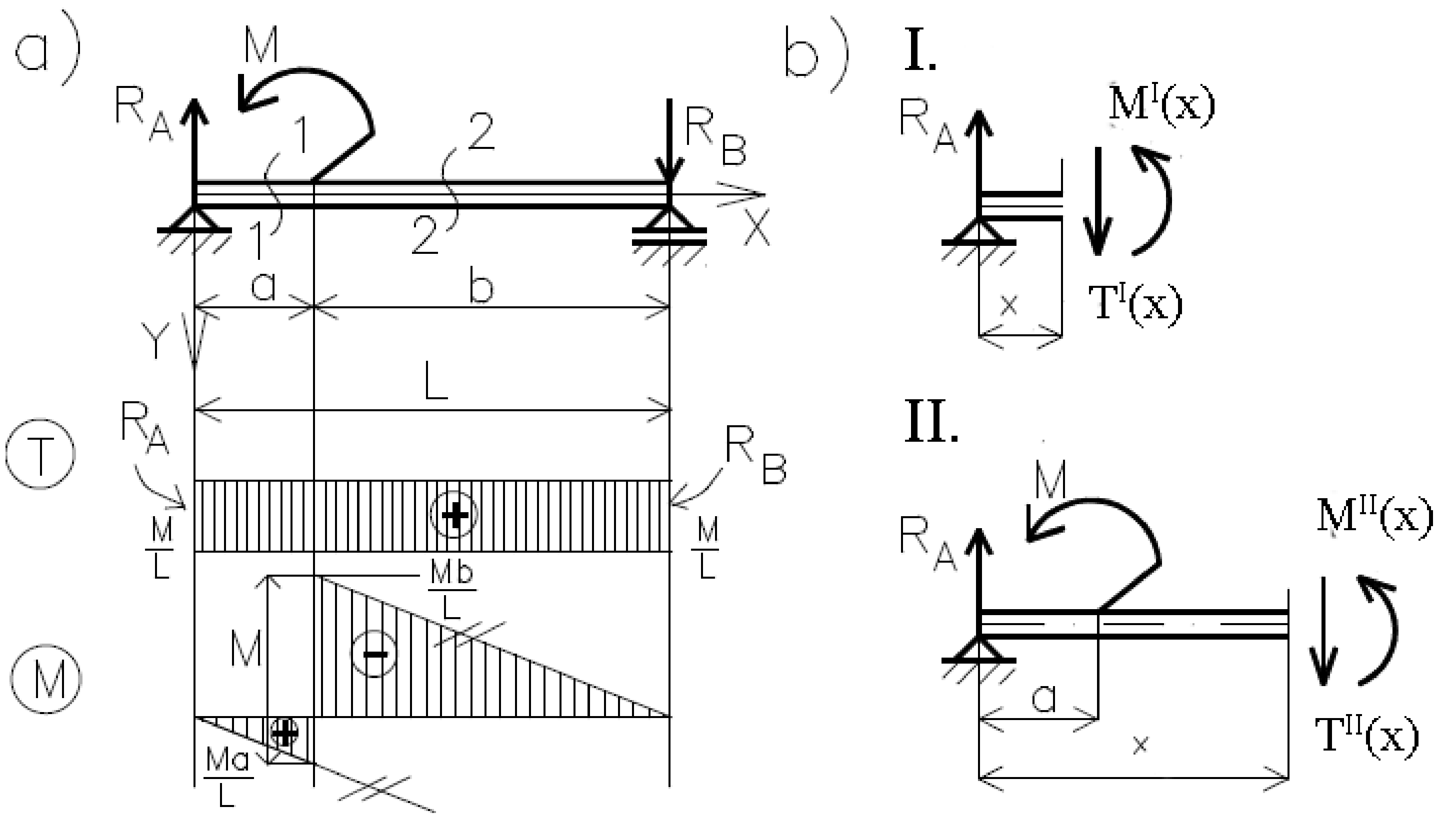
Ekstremum momentu występuje w przekroju, w którym siła ścinająca jest równa zeru.

Sprawdzenie można dokonać Rozpatrując prawy koniec belki.



Przykład

Dla belki obciążonej momentem ***M*** wykonać wykresy sił tnących i momentów zginających



Rys. 14.

Rozwiązanie

a) Wyznaczenie reakcji podporowych (siły bierne)

$$\sum M_A = 0 \quad -R_B \cdot L + M = 0 \rightarrow R_B = \frac{M}{L}$$

$$\sum M_B = 0 \quad R_A \cdot L - M = 0 \rightarrow R_A = \frac{M}{L}$$

Sprawdzenie:

$$R_A - R_B = 0$$

b) wydzielamy w belce dwa przedziały:

I. przedział $\quad 0 \le x \le a$

$$M_g^I(x) = R_A \cdot x \qquad T^I(x) = R_A$$

$$M_g^I(0) = 0, \quad M_g^I(a) = M\frac{a}{(a+b)} \qquad T^I(0) = \frac{M}{(a+b)}, \quad T^I(a) = \frac{M}{(a+b)}$$

Rozwiązanie

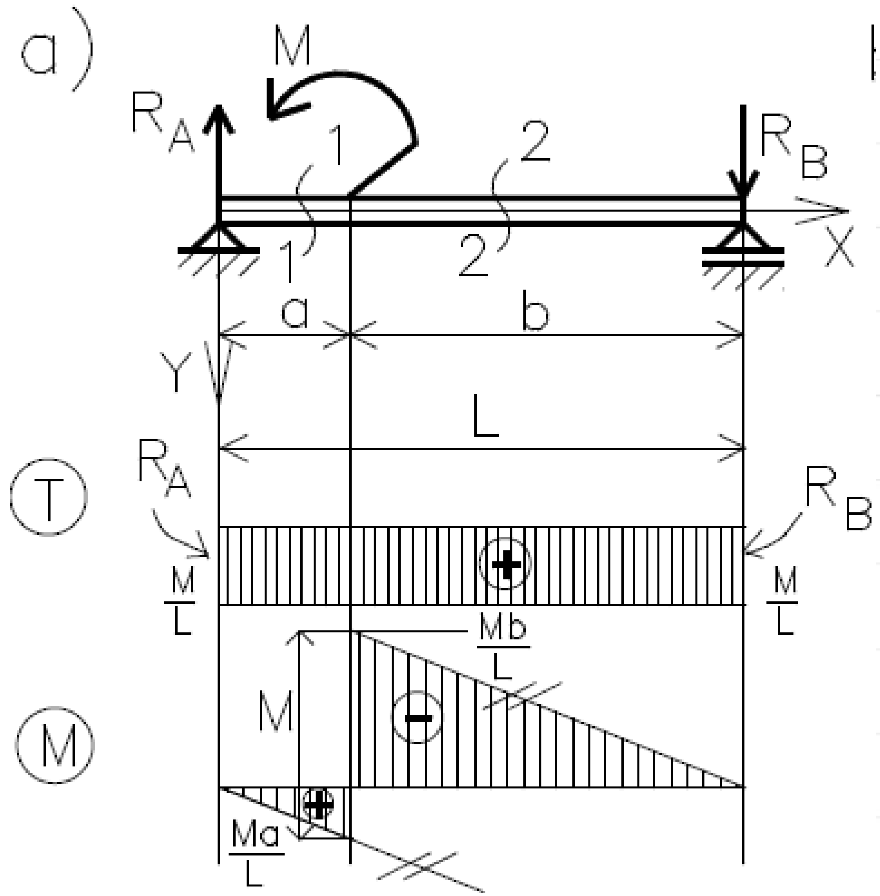
II. przedział $\quad 0 \le x \le (a+b)$

$$M_g^{II}(x) = R_A \cdot x - M$$

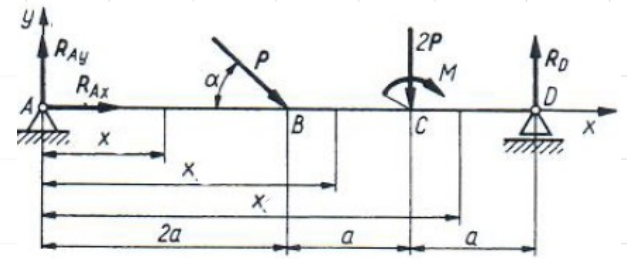
$$M_g^{II}(a) = -\frac{Mb}{(a+b)}, \qquad M_g^{II}(a+b) = 0$$

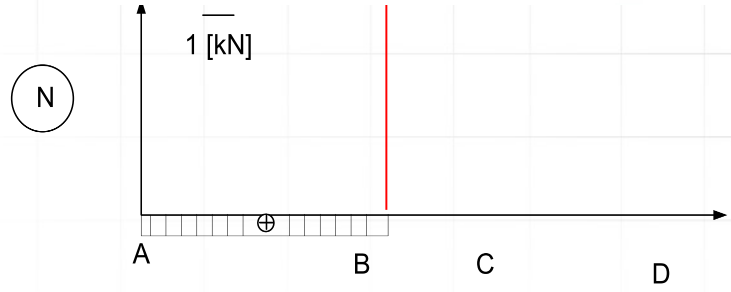
$$T^{II}(x) = R_A$$

$$T^{II}(a) = \frac{M}{(a+b)}, \qquad T^{II}(a+b) = \frac{M}{(a+b)}$$



Zapamiętaj



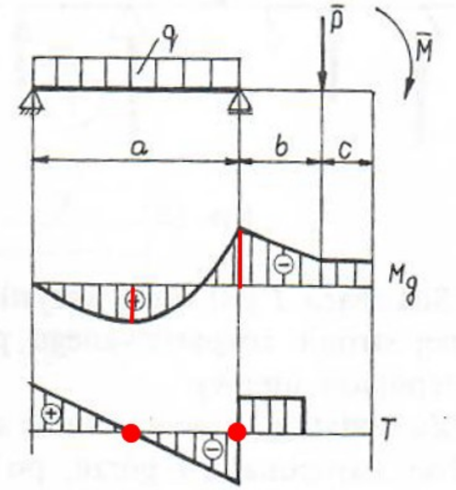


I Dotyczy wykresu ***N*(*x*)**

1. W miejscu przyłożenia sił podłużnych (zewnętrznych, czy też reakcji) na wykresie musi wystąpić skok wartości funkcji o wartość przyłożonej siły.

2. Jeśli przyłożona siła powoduje rozciąganie belki to powoduje również zwiększenie siły *N*, jeśli ściskanie – zmniejszenie *N*.

II. Dotyczy wykresu *T*(*x*)

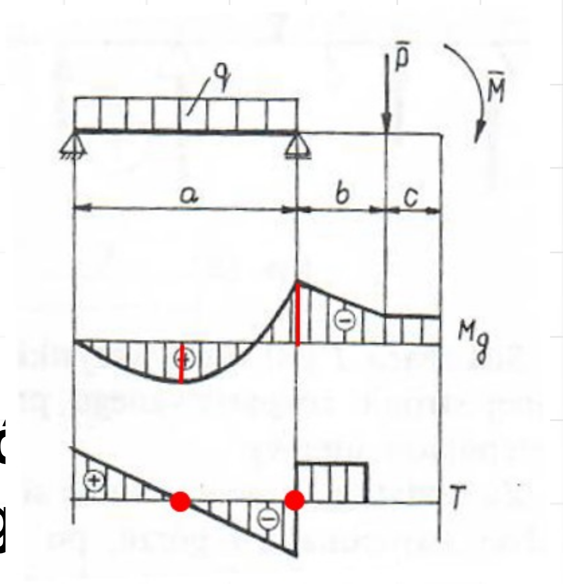


1. W miejscu przyłożenia skupionej siły poprzecznej na wykresie *T* musi wystąpić skok wartości funkcji o wartość przyłożonej siły.

2. Na odcinku, na którym przyłożona jest siła poprzeczna rozłożona równomiernie funkcja *T*(*x*) zmienia swą wartość liniowo.

3. Jeśli „poruszamy się" od lewej do prawej strony to obciążenie poprzeczne skierowane do góry zwiększa się, a skierowane do dołu zmniejsz wartość siły *T*(*x*); jeśli „poruszamy się" od prawej do lewej strony to obciążenie poprzeczne skierowane do dołu zwiększa się, a skierowane do góry zmniejsza wartość siły *T*(*x*).

III. Dotyczy wykresu *M*(*x*)



1. **W przypadku przyłożenia momentu skupionego, na wykresie *M*(*x*) musi wystąpić skok wartości funkcji o wartość przyłożoneg momentu.**

2. Na odcinku, na którym jest siła poprzeczna *T*(*x*) zmienia się liniowo, wykres *M*(*x*) zmienia się parabolicznie

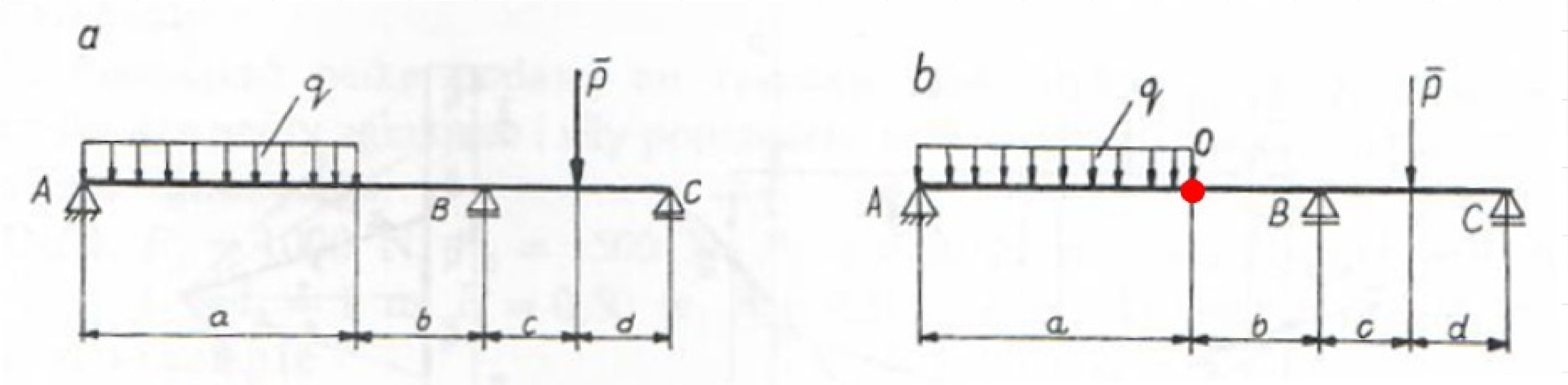
$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

3. W miejscu, gdzie wykres siły *T* się zeruje, na wykresie *M*(*x*) musi wystąpić ekstremum lokalne

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx}$$

Belka z przegubem

Rozpatrzmy belkę na trzech podporach, z których jedna nie jest

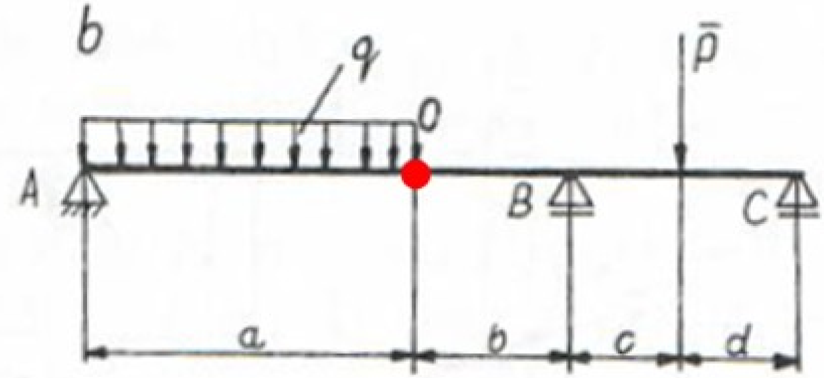


Liczba niewiadomych wielkości podporowych wynosi 4. Belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna.

Uwaga !!!
Należy umieścić przegub. Przegub nie przenosi momentu zginającego. Moment obciążeń jednostronnych na lewo lub prawo od przegubu równa się 0. A to daje jedno równanie i można wykazać, że moment liczony dla belki jako całości np. względem nieutwierdzonego końca daje takie same zależności jakie mógłby dostarczyć przegub.
Można wykorzystać drugie równanie *Mg* względem przegubu.

Belka z przegubem

Równania równowagi:



$$1)\sum P_{ix}=0$$

$$2)\sum P_{iy}=0 \quad R_A+R_B+R_C-q\cdot a-P$$

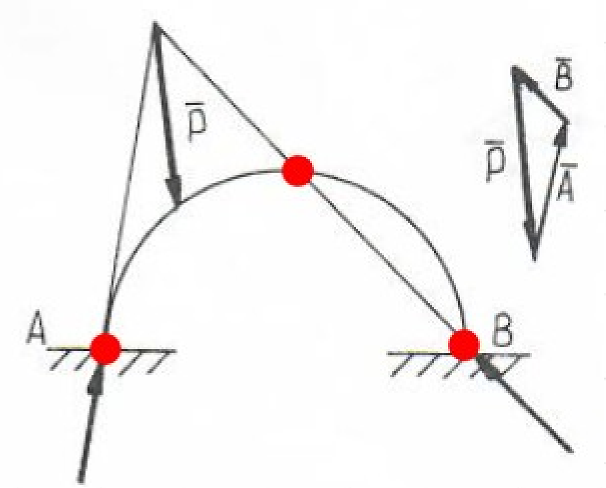
$$3)\sum M_{iA}=0 \quad R_B(a+b)+R_C(a+b+c+d)-q\frac{a^2}{2}-P(a+b+c)$$

$$4)\sum M_{giO}=0 \quad R_A\cdot a-q\frac{a^2}{2}$$

Łuki trójprzegubowe

Nazywamy układ dwóch prętów zakrzywionych, połączonych przegubami (por. rys. 15).
Zamocowanie przegubowe dostarcza 2 niewiadomych podporowych.

3RRS plus równanie z warunku zerowej wartości Momentu zginającego w przegubie.



Rys. 15.

Gdy siły obciążają obie części łuku, wówczas stosujemy zasadę superpozycji. Głosi ona, że jeżeli skutki są liniowo zależne od przyczyn, to skutek sumy przyczyn równa się sumie skutków wywołanych niezależnymi przyczynami.

Łuki trójprzegubowe

Belka obciążona siłą **P_1** reakcja A_1 wyniesie:

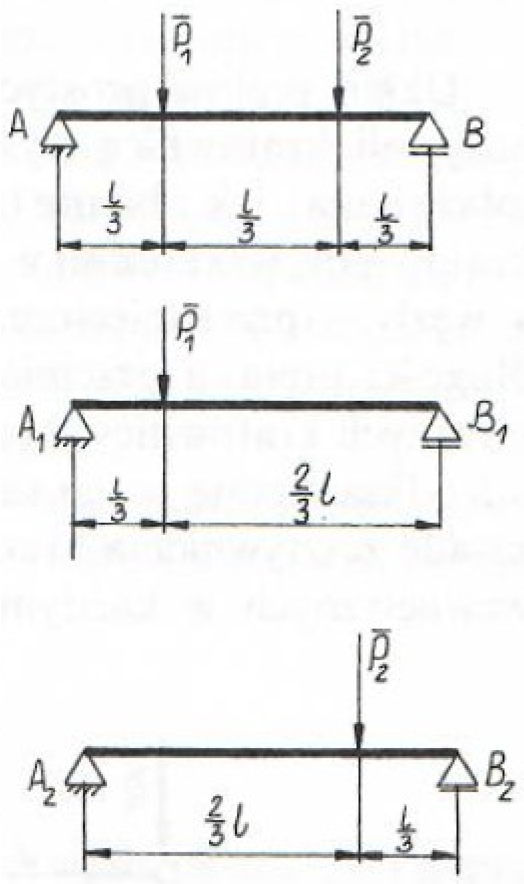
$$A_1 = \frac{P_1 \cdot \frac{2}{3} l}{l}$$

a obciążona siłą **P_2** reakcja A_2 wyniesie

$$A_2 = \frac{P_2 \cdot \frac{1}{3} l}{l}$$

Czyli skutek (A) liniowo zależny od przyczyny (**P**), całkowita reakcja wyniesie

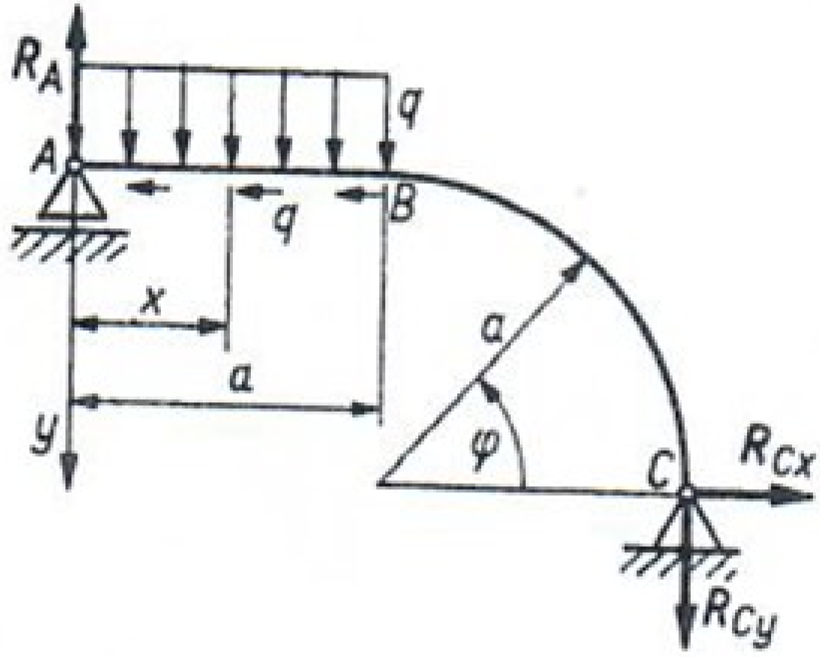
$$A = \frac{P_1 \cdot \frac{2}{3} l + P_2 \cdot \frac{1}{3} l}{l}$$



Rys. 16.

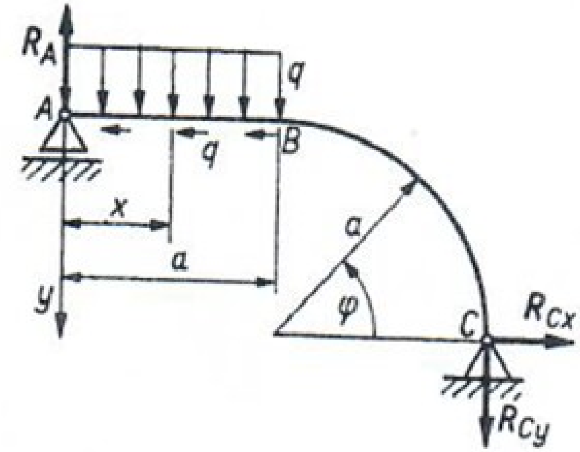
Przykład

Układ którego schemat przedstawiono poniżej (rys. 17) składa się z odcinka prostego *AB*=*a* i łuku o promieniu *a*. na odcinku prostym jest przyłożone pionowo i poziomo obciążenie ciągłe *q*. Wyznaczyć analityczne funkcje momentów gnących i sił tnących.



Rys. 17.

Rozwiązanie



1. Warunki równowagi:

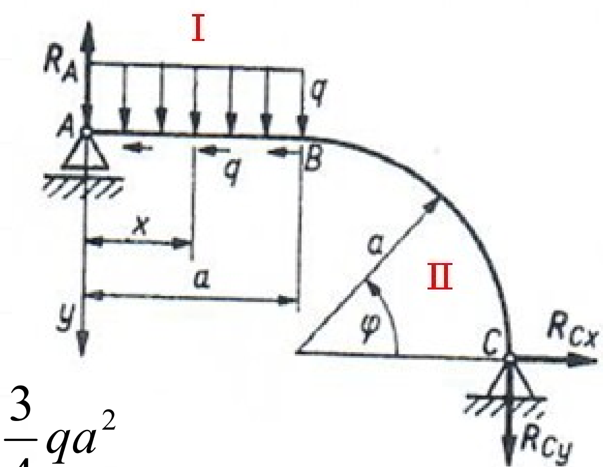
$$\sum P_{ix} = 0 \quad R_{Cx} - qa = 0 \;\rightarrow\; R_{Cx} = qa$$

$$\sum P_{iy} = 0 \quad R_A - qa - R_{Cy} = 0 \;\rightarrow\; R_A = qa + R_{Cy}$$

$$\sum M_{iC} = 0 \quad R_A \cdot 2a - qa \cdot 1{,}5a - qa^2 = 0 \;\rightarrow\; R_A = \frac{5}{4} q \cdot a$$

$$R_{Cy} = \frac{1}{4} qa$$

2. Przedziały i równania sił wewnętrznych:



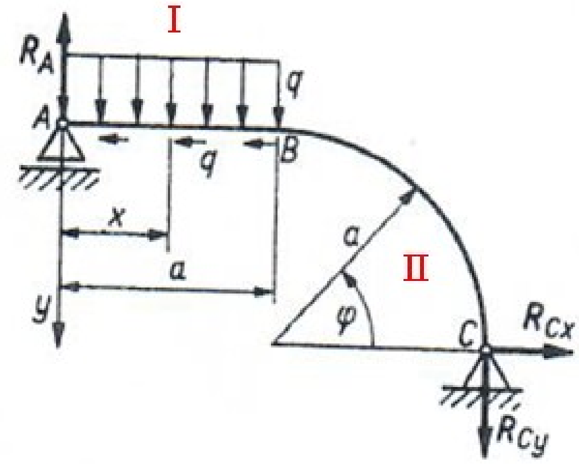
I przedział $\qquad 0 \le x \le a$

$$M_g(x) = \frac{5}{4} qax - q\frac{x^2}{2}$$

$$M_g(0) = 0 \qquad M_g(a) = \frac{3}{4} qa^2$$

Rozwiązanie

2. Przedziały i równania sił wewnętrznych:



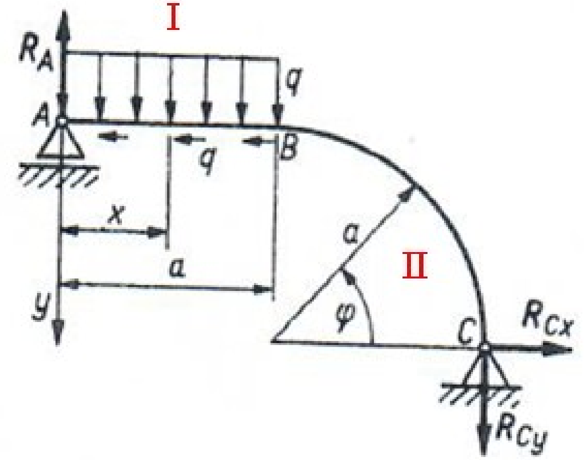
I przedział $\quad 0 \leq x \leq a$

$$T(x) = \frac{5}{4}qa - qx$$

$$T(x=0) = \frac{5}{4}qa \qquad T(x=a) = \frac{1}{4}qa$$

Rozwiązanie

2. Przedziały i równania sił wewnętrznych:



II przedział $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

$$M_g(\varphi) = qa\sin\varphi - \frac{qa}{4}a(1 - \cos\varphi)$$

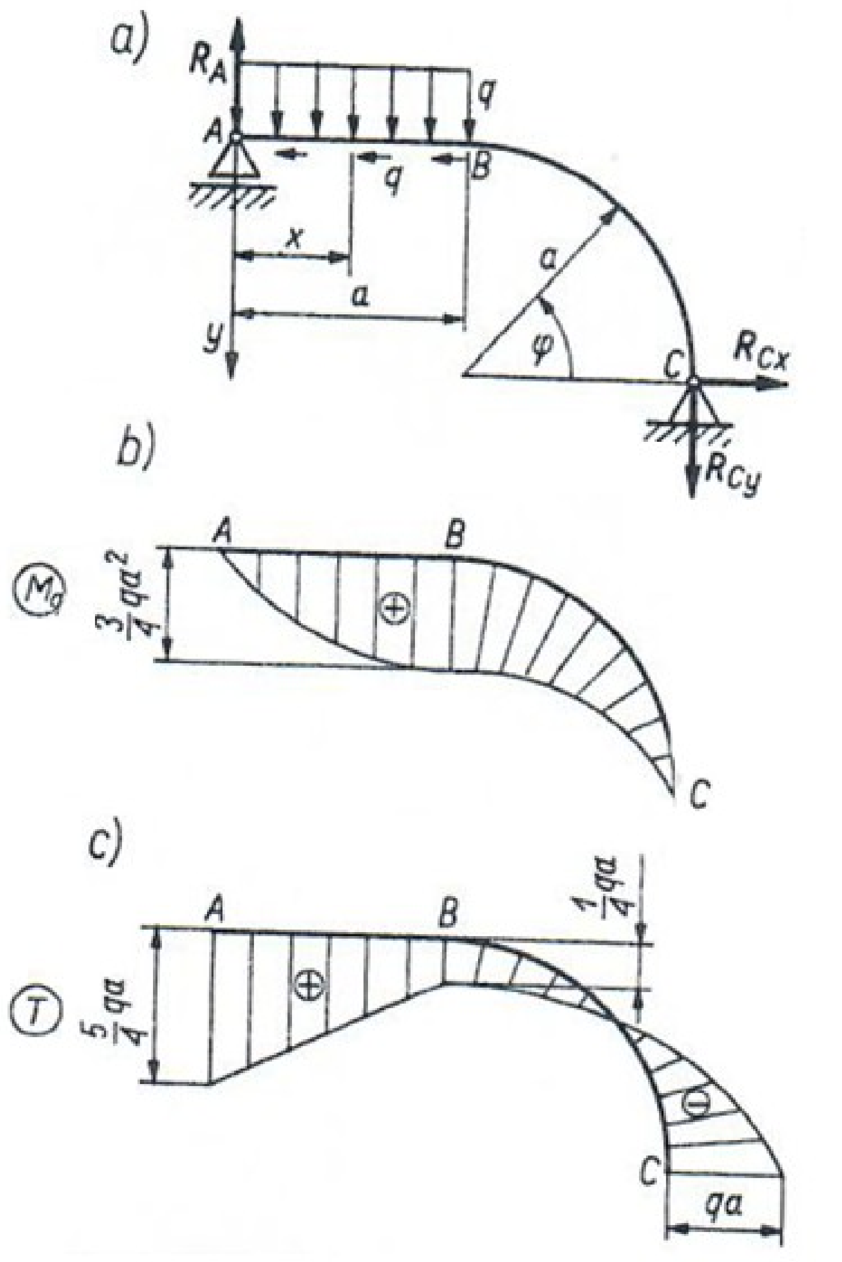
$$M_g(\varphi = 0) = 0 \qquad M_g(\varphi) = \frac{3}{4}qa^2$$

$$T(\varphi) = -qa\cos\varphi + \frac{qa}{4}\sin\varphi$$

$$T(\varphi = 0) = -qa \qquad T\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{qa}{4}$$

Rozwiązanie

3. Wykresy:



Zapamiętaj !!!

Stopień statycznej wyznaczalności

Określenie stopnia statycznej wyznaczalności odnośnie do reakcji:

- Układ jest **statycznie wyznaczalny**, jeżeli współczynnik $n = 0$;
- Układ jest **statycznie niewyznaczalny**, jeżeli współczynnik $n > 0$;
- Układ jest **geometrycznie zmienny**, jeżeli współczynnik $n < 0$.

Zapamiętaj !!!

Stopień zewnętrznej statycznej wyznaczalności n:

- Belka: $n=r-g-rs$;
- Kratownica: $n=r-rs$ lub $n=p-2w$.

Oznaczenia:

- r – liczba reakcji;
- g – liczba przegubów pojedynczych;
- rs=3 – liczba równań statyki;
- p – liczba prętów;
- w – liczba węzłów.

Zapamiętaj !!!

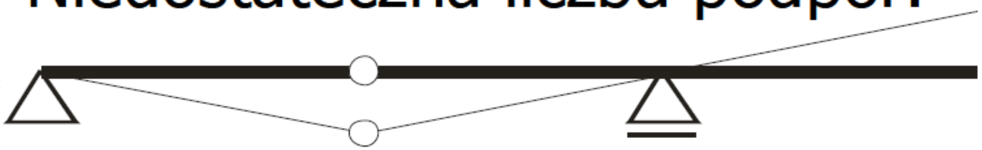
Sposób podparcia a statyczna wyznaczalność

- Nie zawsze stopień statycznej wyznaczalności n=0 gwarantuje statyczną wyznaczalność.
- Niewłaściwe rozmieszczenie podpór może powodować, że układ będzie geometrycznie zmienny (np. reakcje równoległe – płaszczyzna przesuwu) lub chwilowo geometrycznie zmienny (reakcje przecinające się w jednym punkcie – chwilowy środek obrotu).

Zapamiętaj !!!

Sposób podparcia a statyczna wyznaczalność

Niedostateczna liczba podpór.



Belka na trzech podporach przesuwnych.

Trzy niepodparte przeguby obok siebie.

Belka z niepodpartym przęsłem przegubowym.

Zapamiętaj !!!

Nazwy sił przekrojowych

Wielkości te nazwano:

- N – siła podłużna (normalne) – wywołuje rozciąganie lub ściskanie;
- T_y , T_z (lub Q_y , Q_z) – siły poprzeczne (tnące) – wywołują ścinanie;
- M_x – moment skręcający – wywołuje skręcanie;
- M_y , M_z – momenty zginające – wywołują zginanie.

Zapamiętaj !!!

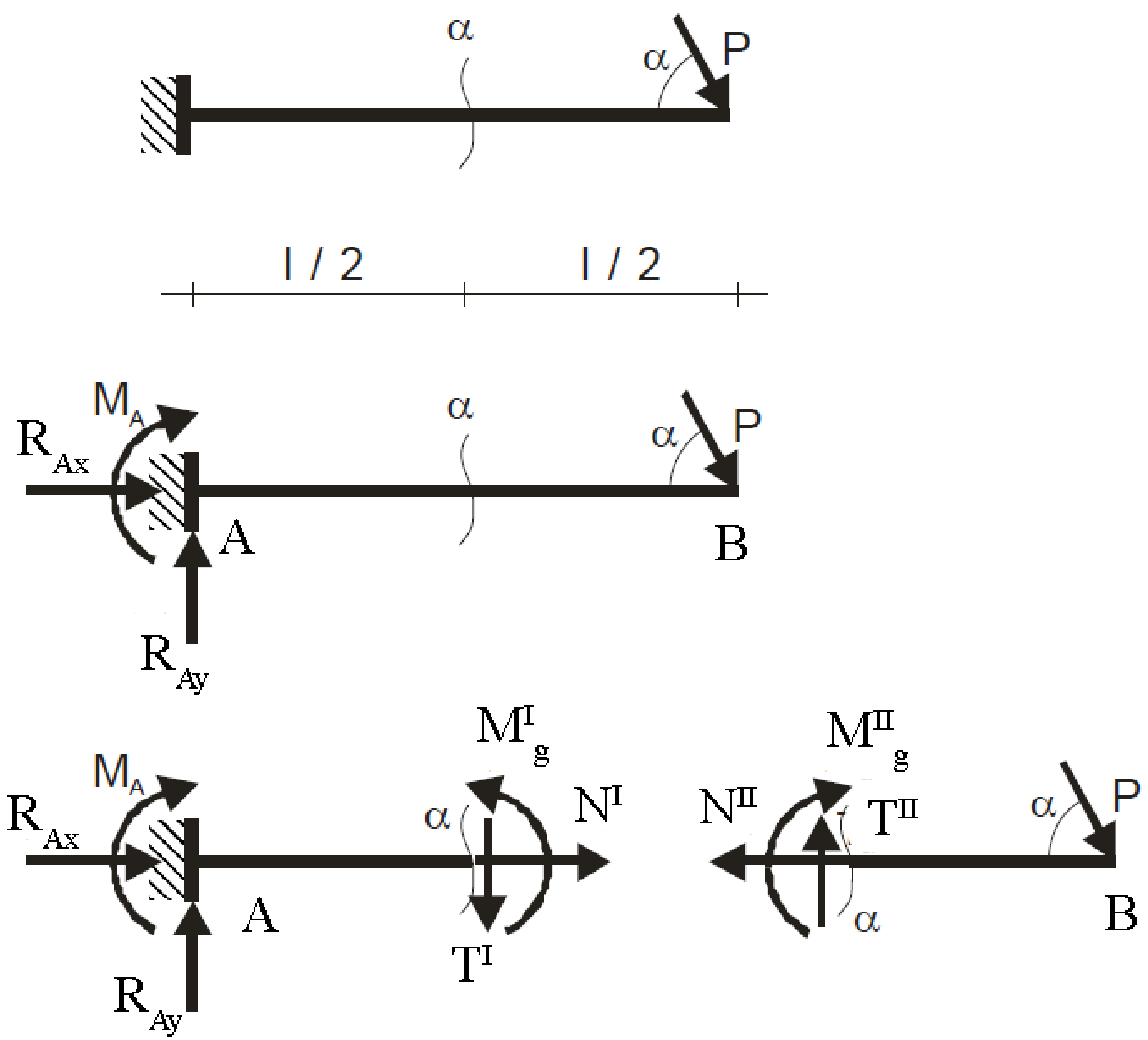
Nazwy sił przekrojowych

Wielkości te nazwano:

- N – siła podłużna (normalne) – wywołuje rozciąganie lub ściskanie;
- T_y , T_z (lub Q_y , Q_z) – siły poprzeczne (tnące) – wywołują ścinanie;
- M_x – moment skręcający – wywołuje skręcanie;
- M_y , M_z – momenty zginające – wywołują zginanie.

Zapamiętaj !!!

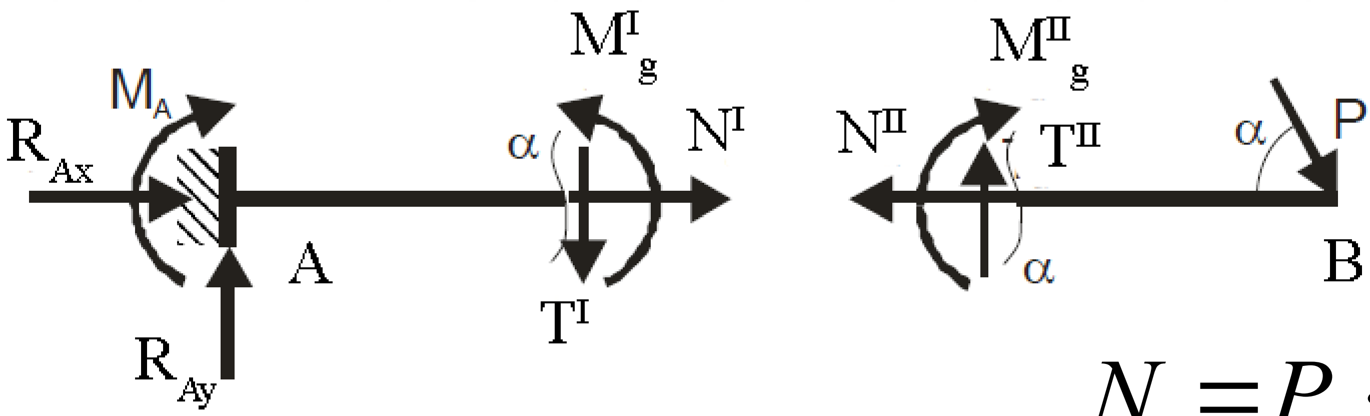
Przykład



Zapamiętaj !!!

Siły wewnętrzne w układach płaskich - definicje

Siła normalna (osiowa, podłużna) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się wzdłuż osi pręta w rozważanym punkcie.

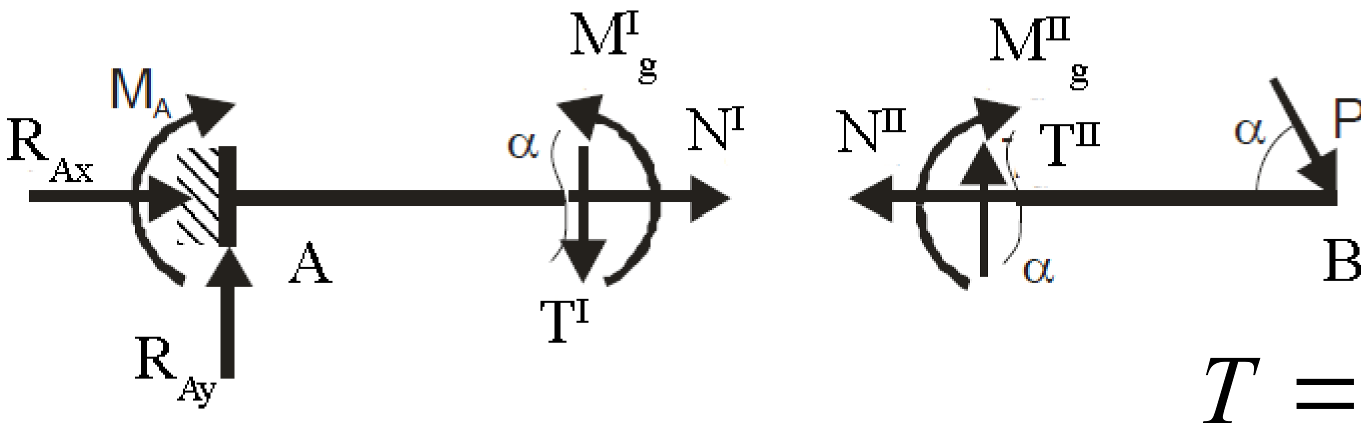


$$N = P \cdot \cos\alpha$$

Zapamiętaj !!!

Siły wewnętrzne w układach płaskich - definicje

Siła poprzeczna (tnąca) – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich przesunięciu się poprzecznie do osi pręta w rozważanym punkcie.

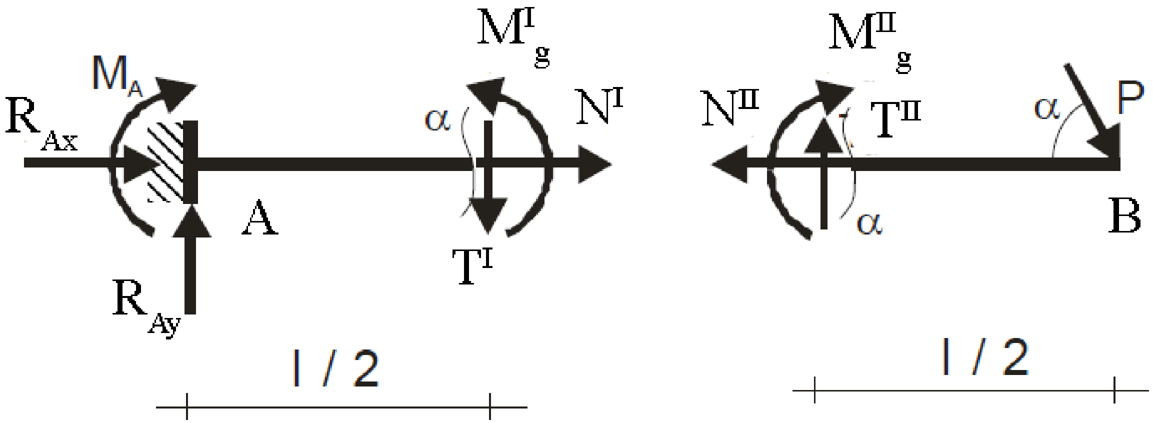


$$T = P \cdot \sin\alpha$$

Zapamiętaj !!!

Siły wewnętrzne w układach płaskich - definicje

Moment zginający – wzajemne oddziaływanie części konstrukcji przeciwdziałające ich wzajemnemu obrotowi w rozważanym punkcie.

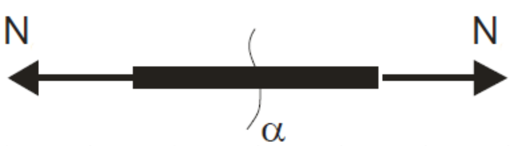


$$M_g = - P\frac{l}{2} \cdot \sin\alpha$$

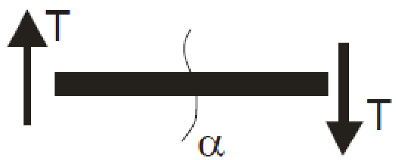
Zapamiętaj !!!

Siły wewnętrzne – konwencja znaków

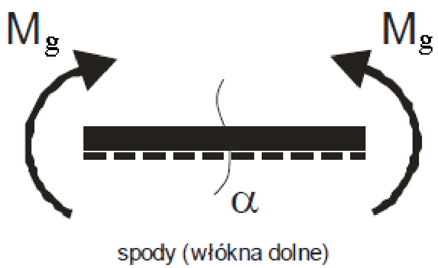
- Siła normalna rozciągająca pręt jest dodatnia.



- Siła poprzeczna powodowana przez obciążenie działające po lewej stronie przekroju do góry lub po prawej stronie do dołu jest dodatnia.



- Moment rozciągający włókna dolne jest dodatni.



Zapamiętaj !!!

Siły wewnętrzne – wykresy

- Kreskowanie (rzędne wykresu) należy zaznaczać prostopadle do osi pręta.
- Rzędne dodatnie wykresów sił normalnych i tnących odkłada się zazwyczaj u góry.
- Wykresy sił podłużnych i poprzecznych rysujemy ze znakiem.

Zapamiętaj !!!

Siły wewnętrzne – wykresy

- Wykresy momentów nie muszą być znakowane, ale należy zwracać uwagę, aby rzędne momentu odkładać po stronie włókien rozciąganych.
- Rzędne dodatnie wykresu momentów zginających odkłada się u dołu (moment dodatni, gdy rozciągane są włókna dolne).
- Wykres momentu wskazuje jak odkształci się pręt i gdzie, w poszczególnych elementach, włókna są rozciągane.

Zapamiętaj !!!

Punkty charakterystyczne

Ze względu na konieczność modyfikacji równań sił wewnętrznych:

– w belkach i ramach – końce prętów, punkty przyłożenia sił:

- czynnych: siła skupiona, moment skupiony, początek lub koniec obciążenia ciągłego;
- biernych: punkty podporowe;

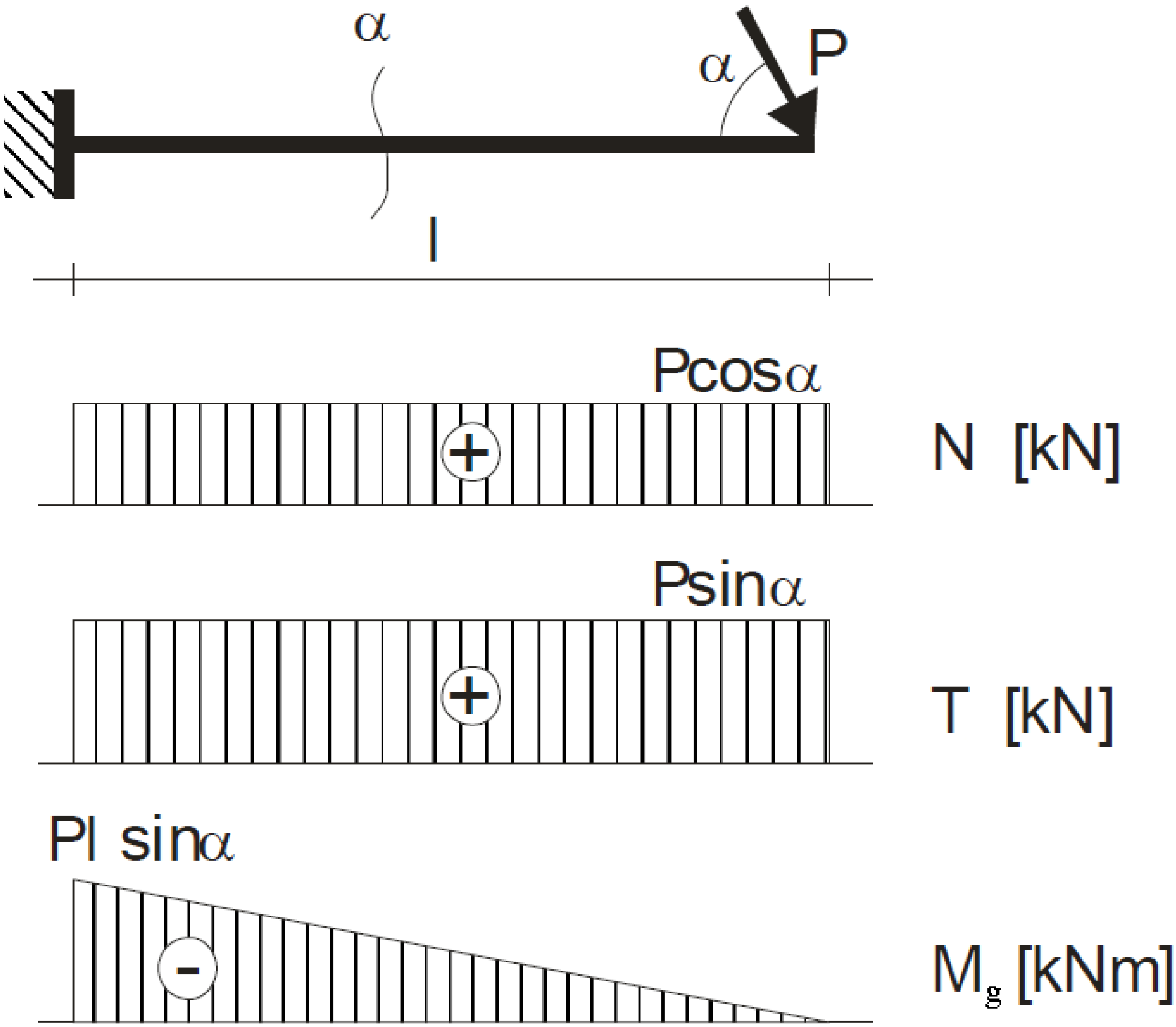
Zapamiętaj !!!

Przegub

Przegub jest jedynie punktem kontrolnym (moment równy jest 0). Nie powoduje on konieczności wprowadzenia dodatkowego przekroju.

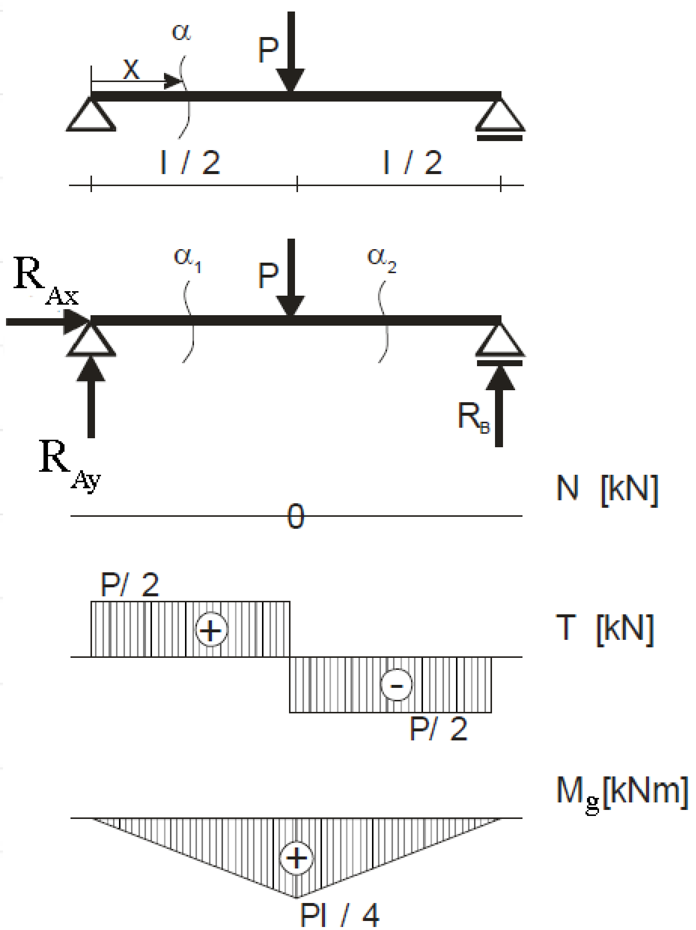
Zapamiętaj !!!

Wykresy sił wewnętrznych



Zapamiętaj !!!

Siła skupiona



$$R_{Ay} = R_B = \frac{P}{2}, \quad R_{Ax} = 0$$

$$N^I(x) = 0 \quad N^{II}(x) = 0$$

$$T^I(x) = R_{Ay} = \frac{P}{2} \quad T^{II}(x) = R_{Ay} - P = -\frac{P}{2}$$

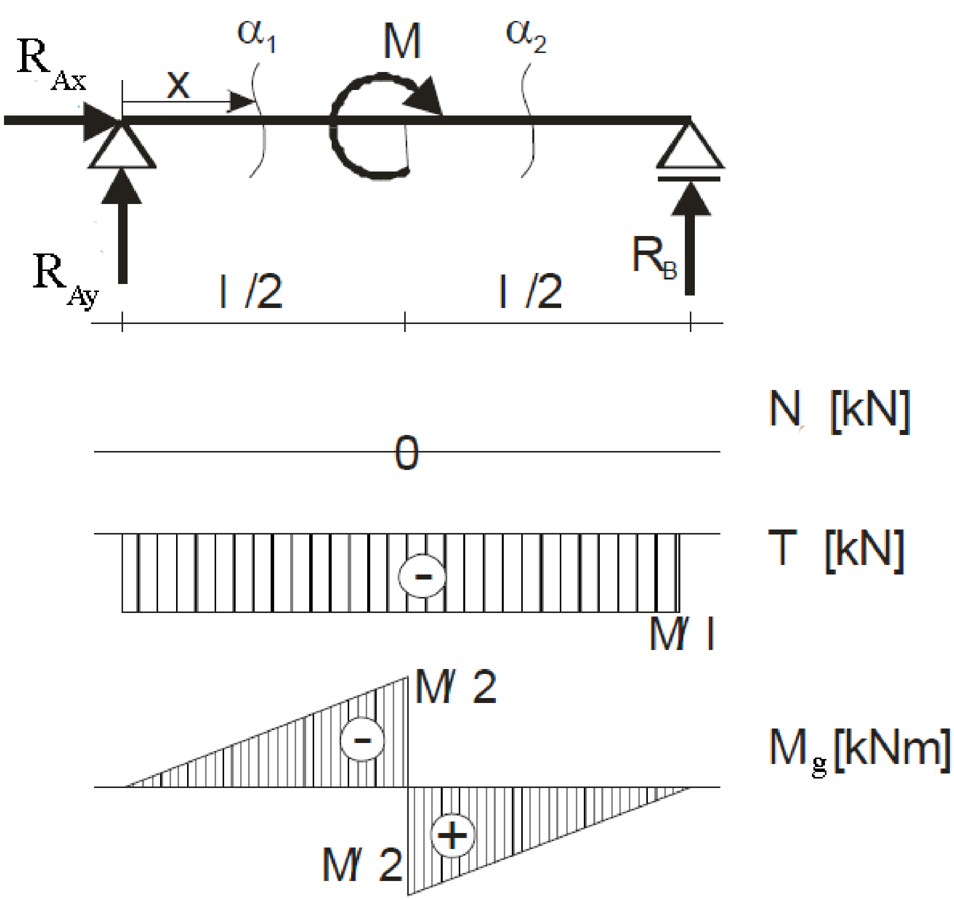
$$M_g^I = R_{Ay} \cdot x = \frac{P}{2}x \quad \begin{array}{|l} x = 0 \quad M_g^I(0) = 0 \\ x = \frac{l}{2} \quad M_g^I\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} \end{array}$$

$$M_g^{II} = R_{Ay} \cdot x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2}x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = P\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

$$\begin{array}{|l} x = \frac{l}{2} \quad M_g^{II}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4} \\ x = l \quad M_g^{II}(l) = 0 \end{array}$$

Zapamiętaj !!!

Moment skupiony



$$R_{Ay} = -\frac{M}{l}, \quad R_B = \frac{M}{l}, \quad R_{Ax} = 0$$

$$N^I(x) = 0 \quad N^{II}(x) = 0$$

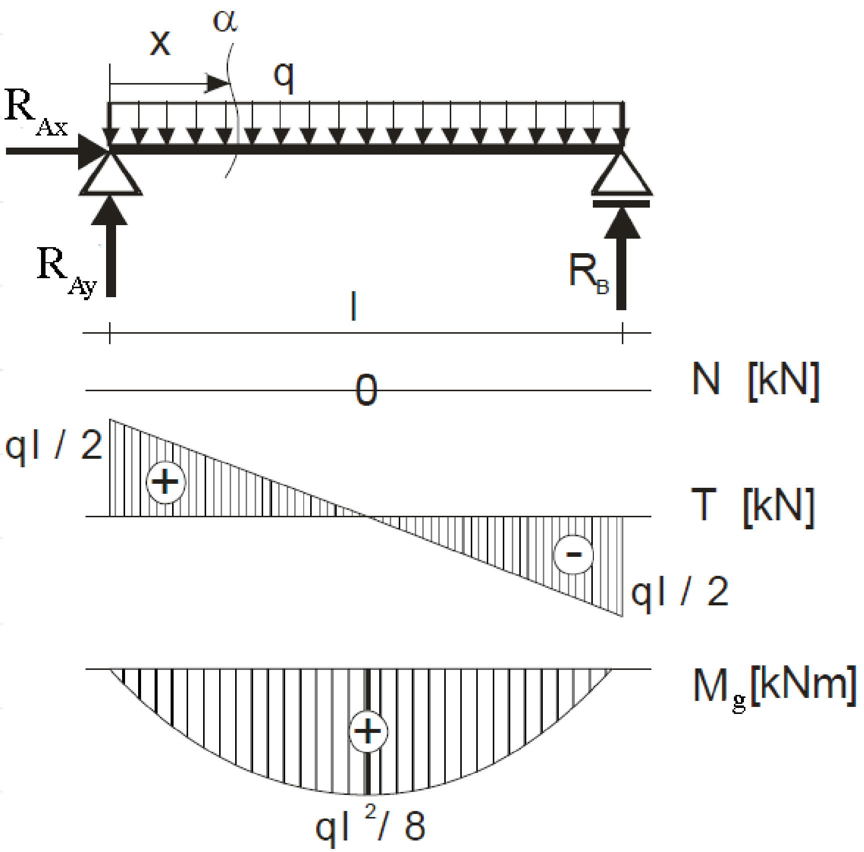
$$T^I(x) = R_{Ay} = -\frac{M}{l} \quad T^{II}(x) = -\frac{M}{l}$$

$$M_g^I = R_{Ay} \cdot x = -\frac{M}{l}x \quad \left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_g^I(0) = 0 \\ x = \frac{l}{2} & M_g^I\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{M}{2} \end{array} \right.$$

$$M_g^{II} = R_{Ay} \cdot x + M = M\left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = \frac{l}{2} & M_g^{II}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M}{2} \\ x = l & M_g^{II}(l) = 0 \end{array} \right.$$

Zapamiętaj !!!
Obciążenie ciągłe równomierne



$$R_{Ay} = R_B = \frac{ql}{2}, \quad R_{Ax} = 0$$

$$N(x) = 0$$

$$T(x) = R_{Ay} - qx = \frac{ql}{2} - qx$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = 0 & T(0) = \frac{ql}{2} \\ x = \frac{l}{2} & T\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \\ x = l & T(l) = -\frac{ql}{2} \end{array} \right.$$

$$M_g = R_{Ay} \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = q\left(\frac{lx}{2} - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_g(0) = 0 \\ x = \frac{l}{2} & M_g\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8} \\ x = l & M_g(l) = 0 \end{array} \right.$$

Zapamiętaj !!!
Obciążenie ciągłe liniowo zmienne

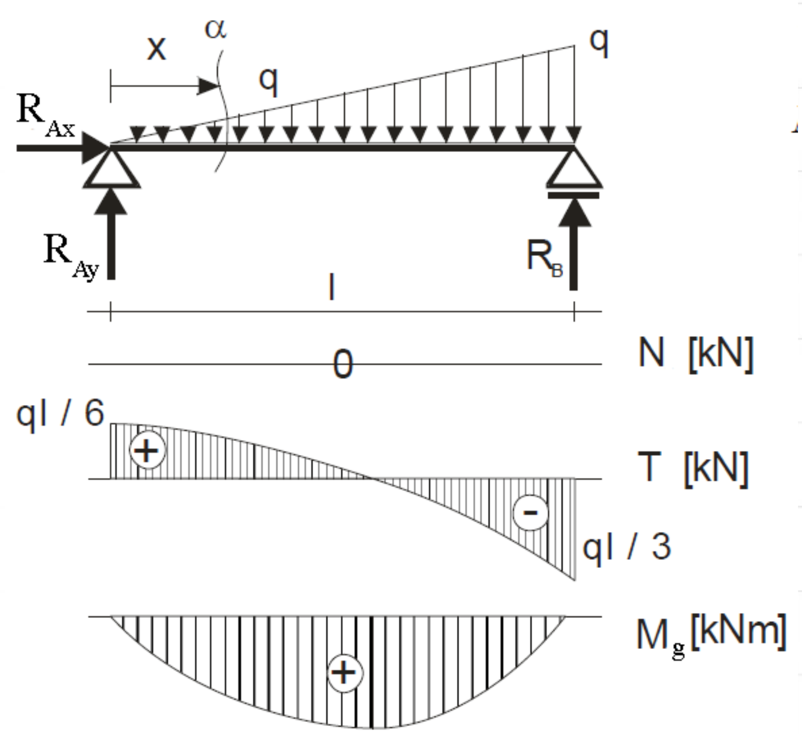
$$R_{Ay} = \frac{ql}{6}, \quad R_B = \frac{ql}{3}, \quad R_{Ax} = 0$$

$$N(x) = 0$$

$$q(x) = \frac{q}{l} \cdot x$$

$$T(x) = R_{Ay} - \frac{1}{2} q(x) \cdot x = \frac{ql}{6} - \frac{1qx^2}{2l}$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = 0 & T(0) = \frac{ql}{6} \\ x = l & T(l) = \frac{ql}{3} \end{array} \right.$$

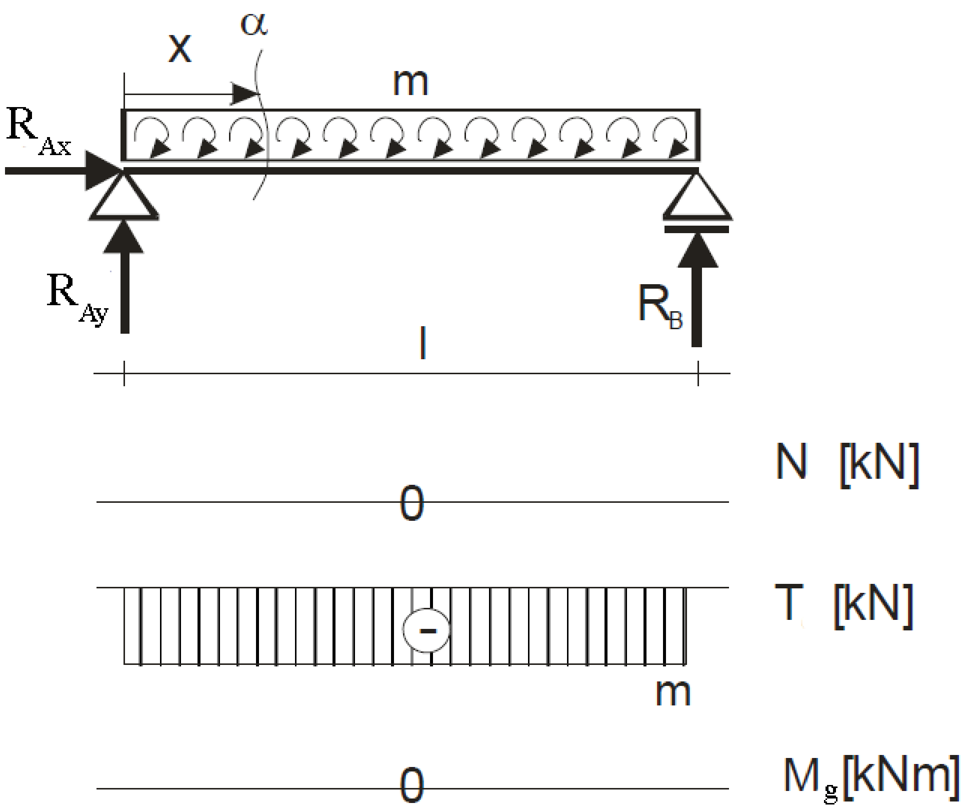


$$M_g = R_{Ay} \cdot x - \frac{1}{2} q(x) \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{2} \frac{qx}{l} \cdot x \cdot \frac{x}{3} = \frac{ql}{6} \cdot x - \frac{1}{6} \frac{q}{l} x^3$$

$$\left| \begin{array}{ll} x = 0 & M_g(0) = 0 \\ x = l & M_g(l) = 0 \end{array} \right.$$

Zapamiętaj !!!

Obciążenie ciągłe momentem



$$R_{Ay} = -m, \quad R_B = m, \quad R_{Ax} = 0$$

$$N(x) = 0$$

$$T(x) = R_{Ay} = -m$$

$$M_g = R_{Ay} \cdot x + mx = -mx + mx = 0$$